اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1) إذا كان $\cos\theta = -0.5$ ، فإنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ يقعُ في :

a) الربعِ الثاني
b) الربعيْنِ : الثاني، والثالثِ.
c) الربعِ الرابعِ
d) الربعيْنِ :الثاني، والرابعِ.

2) إذا قطعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدة في النقطة $P\left(-\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$ فإنّ القيمة $\sin\theta$ هي

a) $-\frac{40}{41}$
b) $\frac{9}{40}$
c) $-\frac{9}{41}$
d) $\frac{9}{41}$

3) قياسُ الزاويةِ المرجعيةِ للزاويةِ $230°$ هوَ:

a) $130°$
b) $40°$
c) $50°$
d) $140°$

4) إذا كانت $90° < x < 180°$ وكان $\sin x = \frac{8}{17}$ فإنّ قيمة $\tan x$ هي :

a) $-\frac{8}{15}$
b) $\frac{8}{15}$
c) $\frac{15}{17}$
d) $-\frac{15}{8}$

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

$$(\cos x)^2 + (\frac{8}{17})^2 = 1 \rightarrow (\cos x)^2 + \frac{64}{289} = 1$$

$$(\cos x)^2 = 1 - \frac{64}{289}$$

$$(\cos x)^2 = \frac{289}{289} - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{225}{289}} = \mp\frac{15}{17}$$

ولأنّ الزاوية x حسب المعطيات تقع في الربع الثاني حيث $\cos x$ تكون سالبة أي : $\cos x = -\frac{15}{17}$

$$\tan x = \frac{sinx}{cosx} = \frac{\frac{8}{17}}{-\frac{15}{17}} = -\frac{8}{15}$$

5) حَلُّ المعادلةِ $x = \sin^{-1}(-1)$ هوَ:

a) 0° b) 90°

c) 270° d) 360°

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ x المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ عندَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ:

6) $(0.6, 0.8)$

$\cos x = 0.6$, $\sin x = 0.8$,

$$\tan x = \frac{sinx}{cosx} = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3} = 1.33$$

7) $\left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$

$\cos x = \frac{5}{13}$, $\sin x = \frac{-12}{13}$,

$$\tan x = \frac{sinx}{cosx} = \frac{\frac{-12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{-12}{5} = -2.4$$

8) $(-1, 0)$

$\cos x = -1$, $\sin x = 0$,

$$\tan x = \frac{sinx}{cosx} = \frac{0}{-1} = 0$$

9) $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$\cos x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$,

$$\tan x = \frac{sinx}{cosx} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{2}}}{\frac{-1}{\sqrt{2}}} = 1$$

10) $(0, 1)$

$\cos x = 0$, $\sin x = 1$,

$$\tan x = \frac{sinx}{cosx} = \frac{1}{0} = u, d$$ غير معرّف

11) $(-0.96, 0.28)$

$\cos x = -0.96$, $\sin x = 0.28$,

$$\tan x = \frac{sinx}{cosx} = \frac{-0.28}{0.96} = -0.29$$

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ المُتبقِّيةَ في كلٍّ ممّا يأتي:

4) $\sin x = \frac{-1}{2}$, $270^\circ \le x \le 360^\circ$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \longrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\cos x = \mp \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$

ولأن الزاوية x تقع في الرابع الرابع فإن $\cos x$ موجب أي :

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan x = \frac{sinx}{cosx} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

15) $\cos x = 0.4\ ,\ 0^\circ \le x \le 360^\circ$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\sin^2 x = 1 - (0.4)^2 = 1 - 0.16 = 0.84$

$\sin x = \mp \sqrt{0.84}$

$\tan x = \dfrac{sinx}{cosx} = \dfrac{\sqrt{0.84}}{0.4}$ عندما : $\sin x = \sqrt{0.84}$

$\tan x = \dfrac{sinx}{cosx} = \dfrac{-\sqrt{0.84}}{0.4}$ عندما : $\sin x = -\sqrt{0.84}$

16) $\tan x = 3 \ , \ 180^o \leq x \leq 360^o$

$$\tan x = \frac{sinx}{cosx} \quad \longrightarrow \quad 3 = \frac{sinx}{cosx}$$

$$\sin x = 3\cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \longrightarrow \quad (3\cos x)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$9\cos^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \longrightarrow \quad 10\cos^2 x = 1 \quad \longrightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{10}$$

$$\cos x = \mp \frac{1}{\sqrt{10}}$$

ولأنّ الزاوية x تقع في الربع الثالث والرابع و $\tan x$ يكون موجب في الربع الثالث فإنّ :

$$\cos x = - \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\sin x = 3\cos x \quad \longrightarrow \quad \sin x = - \frac{3}{\sqrt{10}}$$

17) $\sin x = -\cos x\,,\ 0^\circ \le x \le 360^\circ$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ \rightarrow\ (-\cos x)^2 + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow 2\cos^2 x = 1 \rightarrow + \cos^2 x = \frac{1}{2}$

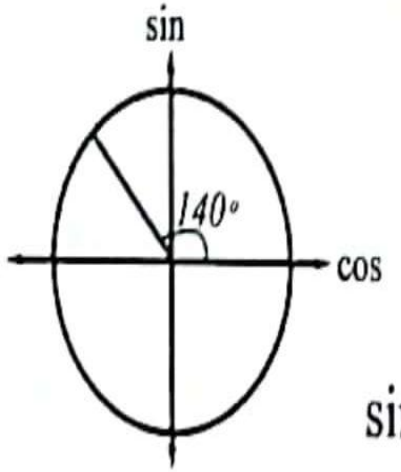
$\cos x = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \rightarrow \sin x = -(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan x = \frac{sinx}{cosx} \ \rightarrow \ \tan x = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$

$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ \rightarrow \sin x = -(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan x = \frac{sinx}{cosx} \ \rightarrow \ \tan x = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي :

18) $\sin 140^\circ$



يقَعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 140° في الربعِ الثاني؛ لذا أَستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:

إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$\theta = 140^\circ$

$$\begin{aligned}\theta' &= 180^\circ - \theta \\ &= 180^\circ - 140^\circ \\ &= 40^\circ\end{aligned}$$

الجيب موجب في الربعِ الثاني

$$\sin 140^\circ = \sin 40^\circ = 0.642$$

19) $\cos 173^\circ$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 173° في الربعِ الثاني ؛ لذا أستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:

إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$\theta = 173^\circ$

$\theta' = 180^\circ - \theta$

$\theta' = 180^\circ - 173^\circ$

$\approx 7^\circ$

جيب التمام سالب في الربعِ الثاني

$\cos 175^\circ = -\cos 7^\circ \approx -0.9925$

---

20) $\tan 219^\circ$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 219° في الربعِ الثالثِ؛ لذا نستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:

إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$\theta = 219^\circ$

$\theta' = \theta - 180^\circ$

$= 219^\circ - 180^\circ$

$= 39^\circ$

الظل موجب في الربعِ الثالثِ

$\tan 219^\circ = \tan 39^\circ = 0.8097$

---

21) $\sin 320^\circ$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 320° في الربعِ الرابع ؛ لذا أستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:

إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$\theta = 320o$

$\theta' = 360^\circ - \theta$

$\theta' = 360^\circ - 320^\circ$

$= 40^\circ$

الجيبُ سالبٌ في الربعِ الرابع

$\sin 320^\circ = -\sin 40^\circ = -0.6427$

حسب القاعدة:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

23 $\sin^2 150^\circ + \cos^2 150^\circ = 1$

22) $2\sin 150^\circ + \tan 135^\circ$

$\sin 150^\circ$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 150° في الربعِ الثاني؛ لذا أستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:

إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$\theta = 150^\circ$

$\theta' = 180^\circ - \theta$

$= 180^\circ - 150^\circ$

$= 30^\circ$

الجيب موجب في الربعِ الثاني

$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 0.5$

$\tan 135^\circ$

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 135° في الربعِ الثاني ؛ لذا نستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:

إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$\theta = 135^\circ$

$\theta' = 180^\circ - \theta$

$= 180^\circ - 135^\circ$

$= 45^\circ$

الظل سالب في الربعِ الثاني

$\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$

بالتعويض في المعادلة $2\sin 150^\circ + \tan 135^\circ$

$2(0.5) + (-1) = 1 - 1 = 0$

24) $3\cos^2 x - 1 = 0$

$3\cos^2 x = 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{3}$

$\cos x = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$

عندما : $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad x = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54.7°$

ولأن جتا يكون موجباً أيضاً في الربع الرابع فإنّه يوجد حل آخر للمعادلة هو :

$360° - 54.7° = 305.3°$

عندما : $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad x = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54.7°$

ولأنَّ جتا يكونُ سالباً في الربع الثاني والثالث فإن الزاوية $54.7°$ هي زاوية مرجعية للزاوية المطلوبة : $\theta' = 54.7°$

جتا سالب في الربع الثاني :

$180° - 54.7° = 125.3°$

جتا سالب في الربع الثالث :

$180° + 54.7° = 234.7°$

إذن للمعادلة أربعة حلول هي : $54.7° \ , \ 305.3° \ , \ 125.3° \ , \ 234.7°$

25) $\sin x = -1.3212 \cos x$

نقسم طرفي المعادلة على $\cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1.3212 \cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = -1.3212$$

$$x = \tan^{-1} 1.3212 \approx 52.88$$

ولأنّ الظل يكون سالباً في الربع الثاني والرابع فإن الزاوية $52.88°$ هي زاوية مرجعية للزاوية المطلوبة $\theta = 52.88°$

الظل سالب في الربع الثاني : الحل الأول $180° - 52.88° = 127.13°$

الظل سالب في الربع الرابع : الحل الثاني $360° - 52.88° = 307.12°$

26) $4 + 5\sin^2 x = 9\sin x$

$5\sin^2 x - 9\sin x + 4 = 0$ تجميع المعادلة في طرف واحد

هذهِ المعادلةُ تُشْبِهُ المعادلةَ الجبريةَ $5y^2 - 9y + 4 = 0$ ؛ لذا يُمكِنُ حَلُّها بالتحليلِ إلى العواملِ :

$(5\sin x - 4)(\sin x - 1) = 0$

وبذلكَ أتوصَّلُ إلى معادلتَيْنِ بسيطتَيْنِ، ثمَّ أَحُلُّ كلَّ معادلةٍ على حِدَةٍ:

المعادلةُ الأولى $5\sin x - 4 = 0$

$5\sin x = 4 \longrightarrow \sin x = \frac{4}{5}$

$x = \sin^{-1}(\frac{4}{5}) = 53.13°$

ولأنّ الجيب يكون موجباً في الربع الثاني أيضاً فإنّه يوجد حل آخر للمعادلة هو :

$180° - 53.13° = 126.87°$

المعادلةُ الثانيةُ $\sin x - 1$

$\sin x = 1 \longrightarrow x = \sin^{-1}(1) = 90°$

إذن للمعادلة ثلاثة حلول هي : $90°$, $53.13°$, $126.87°$