الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

المصفوفة:

المصفوفة (matrix) هي ترتيب على هيئة مستطيل لأعداد أو مُتغيِّرات في صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين من النوع الآتي: [ ].

مثال 1

أستعمل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:

1) عدد العناصر

2) عدد الصفوف

3) عدد الاعمدة

4) الرتبة

5) اين يقع العنصر -1

6) اين يقع العنصر 5 ، ماذا تلاحظ

7) ما قيمة العناصر التالية a_{11}

a_{12}

a_{31}

a_{32}

أتحقَّق من فهمي

أستعمل المصفوفة: $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:

1) عدد العناصر

2) عدد الصفوف

3) عدد الاعمدة

4) الرتبة

5) اين يقع العنصر -3

6) اين يقع العنصر 1

7) ما قيمة العناصر التالية b_{24}

b_{13}

b_{22}

b_{11}

إذا كانت: $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 9 & 8 \\ 7 & -3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كل عنصر ممّا يأتي:

1) الرتبة

2) ما قيمة العناصر التالية a_{31}

a_{23}

a_{14}

أنواع خاصة من المصفوفات

$A = [2 \quad -4 \quad 0 \quad 7]$	مصفوفة صف (row matrix)
$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$	مصفوفــة عمود (column matrix)
$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$	المصفوفة المُربَّعة (square matrix)
$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	المصفوفة الصفرية (zero matrix)

مثال 2

أُحدِّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$	$B = [4 \quad 5 \quad 7]$	$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$
$D = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 12 & 9 & 5 \end{bmatrix}$	$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$F = [-4 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \quad 0]$

أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$	$[6 \quad 10]$
$\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$	$[10]$
$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$[0 \quad 3 \quad 5 \quad 2]$

المصفوفتان المُتساوِيتان (equal matrices) هما مصفوفتان لهما الرتبة نفسها، وعناصرهما المُتناظِرة مُتساوِية.

$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

مثال 3 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 3y+10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ y & 1 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، y

أتحقَّق من فهمي

إذا كانت: $\begin{bmatrix} 3x-2 & 8 \\ 2 & 2x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، و y.

إذا كانت: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 4 & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x+2y & 4 \\ 3x-11 & 2 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، وy، وz.

إذا كانت: $\begin{bmatrix} 9 & 2x+3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & x^2 \\ 2-y & 10 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، وy.

إذا كانت: $\begin{bmatrix} x+2y & x-y \\ x+y+3z & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$ جد قيمة كلٍّ من x، وy، وz

تنظيم البيانات في المصفوفات وتحليلها

مثال : من الحياة

بيانات: يُبيِّن الجدول المجاور الأطوال والكتل والأعمار والصفوف الدراسية للشقيقات الثلاث هديل وهبه ولانا في إحدى المدارس:

	الطول (cm)	الكتلة (kg)	العمر (year)	الصف الدراسي
هديل	135	38	10	5
هبه	155	50	14	9
لانا	145	45	12	6

1) أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة رتبتها 3×4، بحيث يُمثِّل الطول والكتلة والعمر والصف الدراسي صفوف المصفوفة.

2) أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

3) أجد مجموع عناصر الصف الرابع، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

4) هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر الصف الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

سياحة: يُبيِّن الجدول المجاور نتائج استطلاع آراء عيِّنات من سُكّان ثلاث قرى متجاورة بخصوص مشروع سياحي يُراد إقامته في موقع يتوسَّط هذه القرى:

	مُؤيِّد	مُعارِض	مُحايِد
القرية A	800	130	70
القرية B	460	250	40
القرية C	1300	700	200

a) أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة صفوفها القرى؛ على أنْ يكون عدد المُؤيِّدين مُرتَّبًا ترتيبًا تصاعديًّا.

b) أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

c) أجد مجموع عناصر العمود الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

d) هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر العمود الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أُبرِّر إجابتي.

رياضة: يُبيِّن الجدول المجاور إنجازات ثلاثة من لاعبي كرة القدم في مباريات دوري الصفوف في إحدى المدارس:

	المباريات	التسديدات	الأهداف
سمير	8	15	7
أحمد	11	25	13
فوّاز	14	20	9

أُنظِّم هذه البيانات في المصفوفة S ، بحيث تحوي صفوفها إنجازات اللاعبين الثلاثة، ويُرتَّب فيها عدد الأهداف تنازليًّا، ثمَّ أجد قيمة العنصر s_{32}.

أجد مجموع عناصر الصف الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

أجد مجموع عناصر العمود الثالث، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

كهربائيـــات: تتوزَّع 3 مســـتودعات لإحـــدى وكالات تجارة الأجهـــزة الكهربائية في 3 مدن. يوجد في مســـتودع المدينة الأولى 200 ثلّاجة، و380 غسّـــالة، و250 شاشة، و300 مروحـــة، ويوجد فـــي مســـتودع المدينة الثانيـــة 160 ثلّاجة، و540 غسّـــالة، و290 مروحـــة، ويوجد فـــي مســـتودع المدينة الثالثـــة 120 ثلّاجة، و280 غسّـــالة، و400 شاشة، و470 مروحة:

أُنظِّم هذه البيانات في مصفوفة تُمثِّل أعمدتها أنواع الأجهزة الكهربائية، ثمَّ أُحدِّد رتبة المصفوفة الناتجة.

أجمع عناصر كل صف، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

أجمع عناصر كل عمود، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

مهارات التفكير العليا

تبرير: أُبيِّن إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

إذا كان للمصفوفة A والمصفوفة B العدد نفسه من العناصر، فإنَّ $A = B$.

مسألة مفتوحة: أُنشِئ مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 3، وأُسمّيها A، بحيث يكون $a_{ij} = a_{ji}$، لكلِّ من i, j.

تبرير: إذا كان عدد عناصر المصفوفة B عددًا أوَّليًّا، فماذا يُمكِن أنْ تكون رتبتها؟ أُبرِّر إجابتي.

إرشاد: العدد الأوَّليّ هو عدد أكبر من 1، وله عاملان فقط، هما: العدد 1، ونفسه.

تبرير: إذا كانت المسافة بين إربد وعمّان 88 km، والمسافة بين عمّان والعقبة 324 km، والمسافة بين إربد والعقبة 408 km، فأُنشِئ مصفوفة رتبتها 3 × 3 لتمثيل المسافات بين المدن الثلاث، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

تحدٍّ: أكتب المصفوفة B، حيث: $b_{ij} = 2i - j$ لكل $i \in \{1, 2, 3\}$، ولكل $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

سُئِلت الأُسَر في مدينتين عن مصدر التدفئة الذي تستعمله في فصل الشتاء، ثمَّ سُجِّلت النتائج في الجدول المجاور الذي يُبيِّن عدد الأُسَر التي تستعمل كل مصدر. كيف يُمكِن عرض بيانات الجدول بصورة أُخرى مُختصَرة؟

	الغاز	الكهرباء	الكاز	أُخرى
المدينة A	3256	1678	4589	1253
المدينة B	4560	978	5874	2564

الدرس 2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

جمع المصفوفات وطرحها

يُمكِـن جمع مصفوفتين (adding two matrices) أو طرحهما (subtracting two matrices) إذا وفقط إذا كانت لهما الرتبة نفسها، وذلك بجمع العناصر المُتناظِرة في المصفوفتين في حالة الجمع، وطرح هذه العناصر في حالة الطرح.

مثال 1

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ -1 & -5 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 0\\ -7 & 6\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 7 & 6\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\\ -9 & 1\end{bmatrix}$،

فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1) $A+C$

2) $A+B$

3) $B - D$

4) $C - A$

5) $D + B$

6) $C + D$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 6 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 22 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 25 & 10 & 13 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31 & 26 & -9 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 32 & -12 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 43 & -7 \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

مثال 2

إذا كان: $C=\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 3 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}$، فأجد $5C$

إذا كان: $D=\begin{bmatrix}0 & 4 & -3\\ 7 & -2 & 1\\ 8 & 10 & 6\end{bmatrix}$، فأجد

1) $3D$

2) $-2D$

3) $1.5D$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1) $3\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

2) $\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

3) $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 12 & -32 \\ 9 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

خصائص العمليات على المصفوفات

خصائص العمليات على المصفوفات

مفهوم أساسي

إذا كان A, B, C ثلاث مصفوفات لها الرتبة نفسها، وكان k, h عددين حقيقيين، فإنَّ:

1. $A + B = B + A$ — الخاصية التبديلية لجمع المصفوفات
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ — الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات
3. $k(A + B) = kA + kB$ — خاصية توزيع الضرب في ثابت

مثال 3

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد $3A + 2B - 5C$.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $H = [6 \quad -4 \quad 9]$, $G = [3 \quad 0 \quad 7]$, $F = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$، فأجـد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1) $4E - 3F$

2) $2G + 6F$

3) $5(G + H)$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1) $$2\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

2) $$-4\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -2 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 & 10 \\ 5 & -4 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}\right)$$

3) $$2\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

إذا كان: $C=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1) $4A+3B$

2) $2C-3A$

3) $B+1.5B$

4) $3B + 2C$

5) $2A - C$

6) $4A + 3C$

مثال : من الحياة

تجارة: لـدى إحـدى الشـركات التجارية فرعان فـي مدينة عمّـان، وفرعان آخران في مدينة إربـد. إذا مثّلت المصفوفة A والمصفوفـة B مُعدَّل المبيعات والأربـاح اليومية من الأدوات الكهربائية (بمئات الدنانير) في كلٍّ من فرعي هاتين المدينتين على الترتيب، فأجد المصفوفة C التي تُمثِّل مُعدَّل المبيعات والأرباح الشـهرية لفروع الشـركة في المدينتين معًا (بافتراض أنَّ الشهر 30 يومًا).

$$A=\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{المبيعات} & \text{الأرباح} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 56 & 4 \\ 45 & 3.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{عمّان 1} \\ \text{عمّان 2} \end{matrix} \quad , \quad B=\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{الأرباح} & \text{المبيعات} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 48 & 3 \\ 66 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{إربد 1} \\ \text{إربد 2} \end{matrix}$$

أتحقَّق من فهمي

زراعــة: يملك كلٌّ من راشــد وحمــد مزرعة في الأغــوار، ومزرعة أُخرى فــي المفرق. إذا مثَّلت المصفوفة A مُعدَّل الإنتاج اليومي (بالكيلوغــرام) لمزرعتيهما في الأغوار من البندورة والباذنجان والفلفــل، ومثَّلت المصفوفة B مُعدَّل الإنتاج اليومــي (بالكيلوغرام) لمزرعتيهما فــي المفرق من الأصناف نفســها، فأجد المصفوفــة C التي تُمثِّل مُعدَّل الإنتاج الأســبوعي (بالكيلوغرام) لمزرعتي راشد وحمد في الموقعين معًا.

$$A=\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{بندورة} & \text{باذنجان} & \text{فلفل} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 200 & 500 & 100 \\ 260 & 430 & 245 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{matrix}, \quad B=\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{بندورة} & \text{باذنجان} & \text{فلفل} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 130 & 100 & 300 \\ 240 & 300 & 175 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{matrix}$$

رياضيات الأعمال

رياضة: لدى مَحَلٍّ تجهيزات رياضية فرع في مدينة الكرك، وفرع آخر في مدينة الطفيلة. إذا مثَّلت المصفوفة A عدد البدلات الرياضية التي باعها الفرعان من جميع المقاسات (صغيرة، مُتوسِّطة، كبيرة) في شهر نيسان عام 2024 م، ومثَّلت المصفوفة B عدد البدلات التي باعها الفرعان من المقاسات الثلاثة في شهر نيسان عام 2023 م، فأجد المصفوفة التي تُمثِّل ما باعه كلٌّ من الفرعين في الشهرين معًا.

$$A=\begin{array}{c} \\ \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{صغير} & \text{مُتوسِّط} & \text{كبير} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 30 & 17 \end{bmatrix} \end{array}, \quad B=\begin{array}{c} \\ \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{صغير} & \text{مُتوسِّط} & \text{كبير} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 18 & 42 & 23 \\ 20 & 25 & 21 \end{bmatrix} \end{array}$$

مدارس: يُبيِّن الجدول المجاور محتويات مختبري الحاسوب في إحدى المدارس عام 2024 م. تُخطِّط إدارة المدرسة لزيادة هذه المحتويات بما نسبته 40%. أكتب مصفوفة تُمثِّل ما يجب شراؤه للمختبرين، ومصفوفة أُخرى تُمثِّل محتويات المختبرين بعد عملية الشراء.

	أجهزة حاسوب	طاولات	مقاعد
المختبر A	15	20	30
المختبر B	20	25	40

مهارات التفكير العليا

تبرير: أُحدِّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

إذا كان عدد عناصر المصفوفة A مُساوِيًا لعدد عناصر المصفوفة B، فإنَّه يُمكِن إيجاد $A + B$.

أكتشف الخطأ: ما الخطأ في الحلِّ الآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 0 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

مسألة مفتوحة: أكتب المصفوفتين A, B، بحيث يكون: $3A + 2B = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 6 & -5 & 11 \end{bmatrix}$

تحدٍّ: أجد المصفوفتين X, Y اللتين تُحقِّقان المعادلتين الآتيتين:

$$X-2Y=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 9\end{bmatrix}, 3X+4Y=\begin{bmatrix}8 & 5\\ -31 & 12\end{bmatrix}$$

تُمثِّل المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}0.4 & 0.75\\ 0.6 & 1\\ 1.5 & 2.5\end{bmatrix}$ أسعار البيع (بالدينار) لثلاثة مشروبات (شـــاي، قهوة، عصير) بأكواب صغيرة وأُخرى كبيرة في أحد الأكشـــاك. وقد قرَّر صاحب الكشك رفع الأســـعار بما نسبته 20%؛ نظرًا إلى زيادة التكاليف. ما المصفوفة التي تُمثِّل الأسعار الجديدة؟

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

شروط ضرب المصفوفات

يُمكِن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى مُساوِيًا لعدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة A التي رتبتها $m \times n$ في المصفوفة B التي رتبتها $n \times r$، فإنَّ رتبة المصفوفة الناتجة $A \times B$ هي: $m \times r$.

$$\underset{m \times n}{A} \times \underset{n \times r}{B} = \underset{m \times r}{AB}$$

مُتساوِيان

رتبة AB

مثال 1

إذا كانت $A_{2\times3}$، وكانت $B_{2\times2}$، وكانت $C_{3\times2}$، فأُبيِّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

1 AB

$$\underset{2 \times 3}{A} \times \underset{2 \times 2}{B}$$

غير مُتساوِيين

2 AC

$$\underset{2 \times 3}{A} \times \underset{3 \times 2}{C} = \underset{2 \times 2}{A \times C}$$

مُتساوِيان

رتبة $A \times C$

أتحقَّق من فهمي

إذا كانت $A_{2\times2}$، وكانت $B_{3\times2}$، وكانت $C_{2\times3}$، فأُبيِّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

a) AB

b) BC

c) CA

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}4&0\\2&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&-3\\-2&2\\1&0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0.5&3&0\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2&-1.5&-1\\0.5&0&2\\1.5&-1&1\end{bmatrix}$، فأُبيِّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

1 AB		5 CD	
2 BC		6 BB	
3 DC		7 CB	
4 BA		8 BCD	

مثال 2

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4\\ -3 & 4 & 7\end{bmatrix}$، وكان: $B=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 0 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$، فأجد: AB.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4\\ -3 & 4 & 7\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 0 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\quad & \quad\\ \quad & \quad\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4\\ -3 & 4 & 7\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 0 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\quad & \quad\\ \quad & \quad\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4\\ -3 & 4 & 7\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 0 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\quad & \quad\\ \quad & \quad\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4\\ -3 & 4 & 7\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 0 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\quad & \quad\\ \quad & \quad\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\quad & \quad\\ \quad & \quad\end{bmatrix}$$

أتحقَّق من فهمي

a) إذا كان: $M=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$، وكان: $N=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$، فأجد: MN.

b) إذا كان: $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، وكان: $D=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد: CD.

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \times [2 \quad 5 \quad 3]$

3) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

5) $[8 \quad 10 \quad -7] \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times [-1 \quad 4]$

8) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -14 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

9) $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right)^2$

10) $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^2$

مثال 3 : من الحياة

شطرنج: تنافست ثلاث فِرَق في البطولة النهائية لنادي الشطرنج، وقد دُوِّن عدد مَرّات الفوز والتعادل لهذه الفِرَق في الجدول المجاور. إذا علمْتُ أنَّ فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقاط، وأنَّ تعادله يعني حصوله على نقطة واحدة، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

الفريق	ربح	تعادل
A	5	4
B	6	3
C	4	5

أتحقَّق من فهمي

الفريق	ربح	تعادل	خسارة
A	1	0	3
B	3	1	0
C	1	1	2

كـــرة قدم: يُبيِّن الجدول المجـــاور نتائج 3 فِرَق لكرة القدم بعدمـــا لعب كلٌّ منها 4 مباريات. إذا علمْـــتُ أنَّ فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقـــاط، وأنَّ تعادله يعني حصوله على نقطـــة واحـــدة، وأنَّ خســـارته تعني عدم حصوله على أيِّ نقاط، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

صناعة سـيّارات: تتوزَّع 3 مصانع لإحدى شركات صناعة السـيّارات في 3 مـدن، ويُبيِّن الجدول المجـاور عدد ما يُنتِجـه كل مصنع يوميًّا من 3 طرازات للسـيّارات. إذا كان ربح الشركة في كل سيّارة من الطراز X هو JD1000، ومن الطراز D هو JD 2000، ومن الطراز R هو JD1500، فأستعمل ضرب المصفوفات في إيجاد ربح كل مصنع يوميًّا من جميع طرازات السيّارات (بافتراض أنَّ جميع السيّارات المُنتَجة مَبيعة).

	الطراز X	الطراز D	الطراز R
المدينة *A*	12	10	0
المدينة *B*	4	4	20
المدينة *C*	8	9	12

خصائص ضرب المصفوفات

مفهوم أساسي

تُعَـدُّ الخصائص الآتية صحيحة لأيِّ ثلاث مصفوفـات: R, S, T، وأيِّ عدد حقيقي c؛ شرط أنْ تكون عمليتا الجمع والضرب مُعرَّفتين في جميع الحالات الآتية:

1. $(RS)T = R(ST)$ — خاصية التجميع لضرب المصفوفات
2. $c(RS) = (cR)S = R(cS)$ — خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد حقيقي
3. $R(S + T) = RS + RT$ — خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليسار
4. $(R + S)T = RT + ST$ — خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليمين

مثال 4

إذا كان: $R = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$، وكان: $k = 3$، فأجـد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $P(Q + R)$

2 $k(PQ)$

3 $(PQ)R$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $H=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$, $G=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$، وكان: $m=-4$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $(F+G)H$

b) $(FG)H$

c) $G(mH)$

إذا كان: $R=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}$، وكان: $n=-2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) $(QR)P$

2) $R(PQ)$

3) $n(PQ)$

4) $(nR)P$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

دوَّنت سلمى في الجدول المجاور عدد ما باعته في متجرها مـــن أكواب حافظة للحرارة مُتعدِّدة الحجوم (كبيرة، مُتوسِّـــطة، صغيـــرة) في أحد الأيام. كذلـــك دوَّنت طريقة بيع هذه الأكواب؛ وهي إمّا مباشـــرة من المتجر، وإمّا عبر شبكة الإنترنت. إذا كان سعر الكوب الكبير JD 4.5، وسعر الكوب المُتوسِّط JD 4، وسعر الكوب الصغير JD 3.5، فكيف يُمكِن استعمال ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الذي حصلت عليه سلمى من بيع الأكواب بكلتا طريقتي البيع؟

حجم الكوب	كبير	مُتوسِّط	صغير
عبر شبكة الإنترنت	5	4	2
من المتجر	3	5	9

إذا كان: $AB = C$، وكانت رتبة المصفوفة A هي: 3×4، ورتبة المصفوفة C هي: 5×4، فما رتبة المصفوفة B؟

إذا كان: $C=\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$، فأُبيِّن أنَّ: $AB=AC$.

أكتشف الخطأ: حَسَبت كلٌّ من رنا وعبير العنصر c_{23} في المصفوفة: $C=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \\ 11 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ كما يأتي:

إجابة عبير

$$c_{23}=12-8-18$$
$$=-14$$

إجابة رنا

$$c_{23}=-8-18+20$$
$$=-6$$

أيُّهما إجابتها صحيحة؟ أُبرِّر إجابتي.

إذا كان: $B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ y & 4\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ x & 3\end{bmatrix}$، حيث x, y عددان صحيحان موجبان، فأجد:

AB بدلالة x, y.

BA بدلالة x, y.

أصغر قيمة صحيحة موجبة لكلٍّ من x، و y التي تجعل $AB = BA$.

تحدٍّ: أجد قيمة كلٍّ من e, f, g, h التي تجعل المعادلة الآتية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

تبرير: إذا كان A, B مصفوفتين مُربَّعتين من الرتبة n، فلماذا $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$؟

مسألة مفتوحة: أكتب المصفوفتين A, B غير الصفريتين، بحيث يكون $AB = BA$

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

المُحدِّدات

المُحدِّدة (determinant) للمصفوفة المُربَّعة A هي عدد حقيقي يرتبط بالمصفوفة A، ويُرمَز إليه بالرمز $|A|$.

مُحدِّدة الدرجة الثانية

مفهوم أساسي

بالكلمات: يُرمَز إلى مُحدِّدة المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$، وتساوي قيمتها ناتج ضرب عنصري القُطْر الرئيس مطروحًا منه ناتج ضرب عنصري القُطْر الآخر.

بالرموز:
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

1) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

مُحدِّدة الدرجة الثالثة

مفهوم أساسي

يُمكِن إيجاد مُحدِّدة المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باستعمال الطريقتين الآتيتين:

الطريقة 1: باستعمال قاعدة الأقطار.

الخطوة 1: أُعيد كتابة العمود الأوَّل والعمود الثاني على يمين المُحدِّدة.

الخطوة 2: أجد ناتج ضرب عناصر القُطْر الرئيس، وثلاثيات العناصر على المُوازِيات الحمراء المُبيَّنة، ثمَّ أجد مجموعها الكلي.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

الخطوة 3: أجد ناتج ضرب عناصر القُطْر الآخر، وثلاثيات العناصر على المُوازِيات الزرقاء المُبيَّنة، ثمَّ أجد مجموعها الكلي.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

الخطوة 4: أجد قيمة المُحدِّدة بطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2.

الطريقة 2: باستعمال مُحدِّدة المصفوفة 2 × 2

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

مثال 2 أجد قيمة كل مُحدِّدة ممّا يأتي باستعمال قاعدة الأقطار، ثمَّ باستعمال مُحدِّدة المصفوفة 2×2:

1) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

حساب مساحة المُثلَّث باستعمال المُحدِّدات

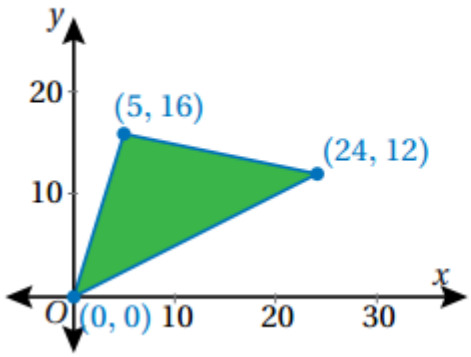
مفهوم أساسي مساحة مُثلَّث مرسوم في المستوى الإحداثي باستعمال المُحدِّدات

مساحة المُثلَّث الذي إحداثيات رؤوسه: $X(x_1, y_1)$, $Y(x_2, y_2)$, $Z(x_3, y_3)$، هي نصف القيمة المُطلَقة للعدد A، حيث:

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

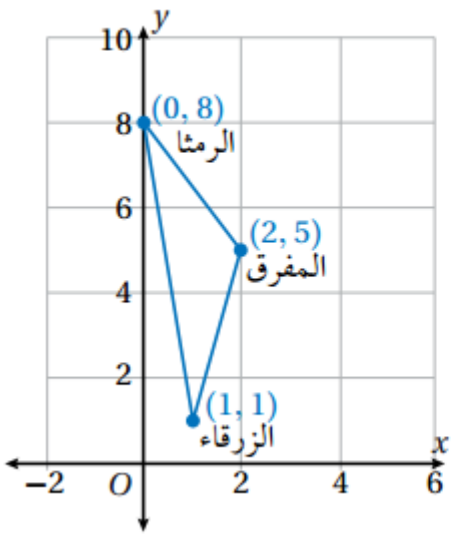
مثال : من الحياة

خرائط: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور مُخطَّط لجزيرة على شـــكل مُثلَّـــث. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تُمثِّل **1 km**، فأجد مساحة الجزيرة.



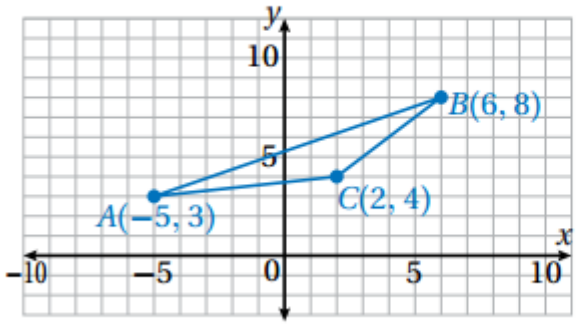
أتحقَّق من فهمي

خرائط: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور إحداثيات كلٍّ من مدينة الزرقاء، ومدينة الرمثا، ومدينة المفرق. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تُمثِّل 10 km، فأجد مساحة المنطقة التي رؤوسها هذه المدن الثلاث.



أتدرّب وأحُلّ المسائل

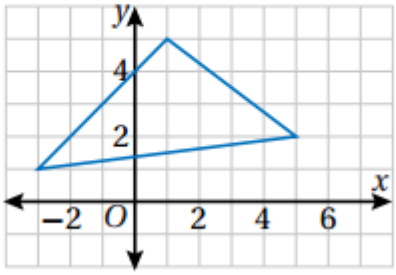
أجد مساحة المُثلَّث ABC المرسوم في المستوى الإحداثي أدناه.



خرائـط: يقع منزل خولة عند النقطة $B(3, 5)$ على خريطة إحداثية للمدينة، ويقع منزل فدوى عند النقطة $C(7, 0)$، ويقع منزل نُهى عند النقطة $D(5, 9)$. أجد مسـاحة المُثلَّث BCD، علمًا بأنَّ الوحـدة الواحدة على الخريطة تُمثِّل 20 m على الأرض.

يُطلَق اسم المُثلَّث الذهبي على واحدة من أهمِّ الوِجهات السياحية في جنوب الأردن، وهي المنطقة التي تضمُّ مدينة العقبة ومدينة البترا ووادي رم. إذا كانت إحداثيات المناطق الثلاث على خريطة للمملكة في مستوى إحداثي، وحدته 1 km، هي: (0, 0) للعقبة، و(56, 116) للبترا، و(6, 50) لوادي رم، فأستعمل المُحدِّدات لحساب مساحة المُثلَّث الذي رؤوسه هذه المواقع الثلاثة.

أجد مساحة المُثلَّث الآتي باستعمال المُحدِّدات.



حلُّ أنظمة المعادلات والمُحدِّدات

قاعدة كريمر

مفهوم أساسي

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات للنظام: $\begin{matrix} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{matrix}$ ،

وكان: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$، حيث $D \neq 0$، فإنَّ حلَّ النظام هو:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D} \ , \ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D} .$$

أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن).

$$3x + 5y = 1$$
$$2x + y = -4$$

أتحقّق من فهمي

أحُلُّ كل نظام معادلات ممّا يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن):

a) $-2x + 7y = 12$
$x + y = 3$

b) $4x - 3y = 29$
$2y + 5x = -5$

أتدرَّب وأحُلّ المسائل أحُلُّ كل نظام معادلات ممّا يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن):

1)
$$\begin{aligned} x + 5y &= -17 \\ 3x - 4y &= 6 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 29 \\ 6y - 4x &= 12 \end{aligned}$$

3)
$$5x - 4y = 22$$
$$4x + 3y = -1$$

4)
$$6x - 7y = -11$$
$$5x + 4y = 40$$

ما قيمة c التي تجعل مُحدِّدة مصفوفة المعاملات للنظام الآتي تساوي صفرًا؟

$$2x + y = 6$$
$$cy = 3 - x$$

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أكتب مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 2×2 تُحقِّق الشرط المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

مُحدِّدتها تساوي -1	جميع عناصرها أعداد موجبة، ومُحدِّدتها -12	مُحدِّدتها تساوي صفرًا.

تحدٍّ: عند حلِّ نظام من معادلتين بمُتغيِّرين باستعمال قاعدة كريمر، فإنَّ الحلَّ هو $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$، و $y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{5}$.

ما قيمة كلٍّ من a، وb، وc؟

الدرس 5

النظير الضربي للمصفوفة
Multiplicative Inverse of Matrix

الاسم	التعريف	مثال
مصفوفة الوحدة	هي مصفوفة مربعة يحتوي قطرها الرئيسي على العنصر 1 ، وباقي العناصر 0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
مصفوفة منفردة	هي مصفوفة مربعة محددتها $=0$	$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
مصفوفة غير منفردة	هي مصفوفة مربعة محددتها $\neq 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

أتحقَّق من فهمي أُبيِّـن إذا كانت كلٌّ من المصفوفات الآتية مُنفرِدة أو غير مُنفـرِدة.

a) $H = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $K=\begin{bmatrix}7 & 6\\ -8 & -7\end{bmatrix}$

ما قيمة x التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix}5 & x\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ مُنفرِدة؟

ما قيمة x التي تجعل المصفوفة : $\begin{bmatrix}x & 8\\ 2 & x\end{bmatrix}$ منفردة؟

ما قيمة x التي تجعل المصفوفة : $\begin{bmatrix}x & x\\ 3 & x\end{bmatrix}$ منفردة؟

مصفوفة الوحدة، والنظير الضربي للمصفوفة

معلومٌ أنَّ ناتج ضرب أيِّ عدد حقيقي في العدد 1 هو العدد نفسه؛ إذ إنَّ $x(1) = 1(x) = x$ لأيِّ عدد حقيقي x. لذلك يُسمّى العدد 1 عنصرًا مُحايِدًا لعملية ضرب الأعداد الحقيقية.

كذلك توجد مصفوفة مُربَّعة تُسمّى **مصفوفة الوحدة** (identity matrix)، ويُرمَز إليها بالرمز I، ويكون جميع عناصر قُطْرها الرئيس 1، وتكون بقيَّة عناصرها أصفارًا، وتمتاز بخاصية في ضرب المصفوفات تُشبِه خاصية العدد 1 في ضرب الأعداد الحقيقية.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

يُمكِن التحقُّق من أنَّ ناتج ضرب المصفوفة I في أيِّ مصفوفة مُربَّعة A، لها نفس رتبة I، هو المصفوفة A نفسها؛ أيْ إنَّ:

$$I \times A = A \times I = A$$

مفهوم أساسي

المصفوفة المُحايِدة لعملية ضرب المصفوفات

بالكلمات: مصفوفة الوحدة I هي المصفوفة المُحايِدة لعملية ضرب المصفوفات، التي إذا ضُرِبت في أيِّ مصفوفة أُخرى من الرتبة نفسها كان ناتج الضرب هو المصفوفة الأُخرى نفسها.

بالرموز: لأيِّ مصفوفة مُربَّعة A، لها رتبة المصفوفة المُحايِدة I نفسها، فإنَّ:

$$I \times A = A \times I = A$$

إذا كانت المصفوفتان A, B مُربَّعتين من الرتبة نفسها، وكان: $A \times B = B \times A = I$، فإنَّ المصفوفة A تُسمّى **نظيرًا ضربيًّا** (multiplicative inverse) للمصفوفة B، وتُسمّى المصفوفة B أيضًا نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة A.

النظير الضربي للمصفوفة المُربَّعة

مفهوم أساسي

النظير الضربي للمصفوفة المُربَّعة A هو المصفوفة A^{-1}، حيث:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

مثال 1

أُبيِّن في كلٍّ ممّا يأتي إذا كانت كل مصفوفة تُمثِّل نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة الأُخرى:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

2) $F=\begin{bmatrix}6 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{5}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$

3) $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -3 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

4) $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

5) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

6) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

7) $L = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$

8) $G=\begin{bmatrix}-3 & -11\\ 1 & 3\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}1.5 & 5.5\\ -0.5 & -1.5\end{bmatrix}$

مفهوم أساسي

النظير الضربي لمصفوفة غير مُنفرِدة من الرتبة 2×2

بالكلمات: إذا كانت مُحدِّدة المصفوفة A ذات الرتبة 2×2 لا تساوي صفرًا، فإنَّ لها نظيرًا ضربيًّا يُمكِن إيجاده باتِّباع الخطوات الآتية:

1. تبديل موقع كلٍّ من عنصري القُطْر الرئيس.
2. ضرب عنصري القُطْر الآخر في -1.
3. ضرب المصفوفة الناتجة في مقلوب المُحدِّدة، أو $\left(\frac{1}{|A|}\right)$.

بالرموز: إذا كانت: $|A| \neq 0$، فإنَّ النظير الضربي للمصفوفة: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

مثال 2

أُبيِّن إذا كانت كل مصفوفة ممّا يأتي مُنفرِدة أو غير مُنفرِدة، ثمَّ أجد النظير الضربي للمصفوفة غير المُنفرِدة:

1) $M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

2) $F = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

3) $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

5) $S = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

6) $V = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

المعادلات المصفوفية

أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي (إنْ أمكن):

1)

$$5x + 3y = 3$$
$$x - 2y = 11$$

2)

$$3x - y = 13$$
$$3y - 2x = 4$$

3)

$$3x + 5y = 13$$
$$x - 2y = -3$$

4)

$$x + y = 20$$
$$x - 2y = -1$$

5) $-2x + 4y = 6$
$x + 2y = 7$

6) $3x + 2y = 8$
$x = y + 1$

7) $5x - 8y = 31$
$2y - 3x = -13$

8) $2x + 7y = 24$
$4x + 13y = 46$

مثال 4 : من الحياة

كيمياء: يعمل يوسف في أحد مختبرات البحوث، وهو يريد تحضير 50 L من محلول حمض الهيدروكلوريك (HCL) بحيث تكون نسبة تركيزه 35%. إذا علمْتُ أنَّ المختبر يحوي من هذا الحمض محلولًا نسبة تركيزه 15%، ومحلولًا آخرَ نسبة تركيزه 40%، فكم لترًا سيستعمل يوسف من كلا المحلولين؟ أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحُلُّها.

أتحقَّق من فهمي

طهي: يوجد في معمل للحلويات محلولان، تركيز السُّكَّر في أحدهما 12%، وتركيزه في الآخر 20%. يريد الطاهي تحضير 20 L من محلول، تركيز السُّكَّر فيه 15%. كم لترًا سيستعمل الطاهي من كلا المحلولين المُتوافِرين في المعمل؟ أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحُلُّها.

صيدلة: لدى صيدلي محلــولان، تركيز الملح في أحدهما 2%، وتركيزه في الآخــر 12%. يريد الصيدلي تحضير 10 L من محلول، تركيز الملح فيه 10%. ما المعادلة المصفوفية التي يتعيَّن استعمالها لتحضير الكمية المطلوبة من المحلول؟ **أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحُلُّها.**

أوراق نقدية: مع سـعاد مجموعة مـن الأوراق النقدية من فئة JD 10، وفئة JD 20، تبلغ قيمتها الإجمالية JD 750. إذا علمْتُ أنَّ عدد أوراق فئة العشرين دينارًا يقلُّ عن مثلي عدد أوراق فئة عشـرة الدنانير بمقدار 5 أوراق، **فأكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة**، ثمَّ أحُلُّها لإيجاد عدد أوراق النقد التي مع سعاد من كلتا الفئتين.

استأجر مُنظِّمو رحلة بحرية في خليج العقبة 8 قوارب، بعضها يحمل 4 أشخاص، وبعضها الآخر يحمل 7 أشخاص. إذا كان عدد المشاركين في الرحلة 50 شخصًا، فأستعمل معادلة مصفوفية لإيجاد عدد القوارب المُستأجَرة من كل نوع.

ما قيمة a التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ نظيرًا ضربيًّا لنفسها؟

إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد المصفوفة C، بحيث يكون: $(B + C)^{-1} = A$.

إذا كان A مصفوفة من الرتبة 2×2، حيث: $A^2 = 2A - 3I$، فأُثبِت أنَّ: $A^3 = A - 6I$.

تبريـــر: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وكانت: $|A| \neq 0, a>0, d>0, b<0, c<0$، فهل توجد عناصر ســالبة في A^{-1}؟ أُبرِّر إجابتي.

برهان: إذا كان: $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، وكان: $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$، فأُثبِت أنَّ: $(AB)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$.

برهان: إذا كان: $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، وكان: $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$، فأُثبِت أنَّ: $(AB)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$.

أكتشف المختلف: أيُّ المصفوفات الآتية مختلفة؟ أُبرِّر إجابتي.

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

تحدٍّ: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$، فأجد المصفوفة B التي تُحقِّق المعادلة: $BA^2 = A$