رياضيات الأعمال

الدرس 1

مُقدِّمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

المصفوفة:

المصفوفة (matrix) هي ترتيب على هيئة مستطيل لأعداد أو مُتغيِّرات في صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين من النوع الآتي: [ ].

مثال 1

أستعمل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ **للإجابة عن الأسئلة الآتية:**

1) **عدد العناصر** = عدد الصفوف × عدد الأعمدة ← $3 \times 2 = 6$

2) **عدد الصفوف** $= 3$

3) **عدد الاعمدة** $= 2$

4) **الرتبة** $= 3 \times 2$

5) **اين يقع العنصر** -1 يقع في الصف الثاني والعمود الأول ويرمز له بالرمز a_{21}

6) **اين يقع العنصر 5 ، ماذا تلاحظ** يقع في الصف الأول والعمود الثاني a_{12}
لاحظ ان $a_{21} \neq a_{12}$

7) **ما قيمة العناصر التالية**

$3 = a_{11}$

$5 = a_{12}$

$0 = a_{31}$

$4 = a_{32}$

Scanned with CamScanner

✍ التحقق من فهمي

استعمل المصفوفة: $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:

1) عدد العناصر $2 \times 4 = 8$

2) عدد الصفوف 2

3) عدد الاعمدة 4

4) الرتبة 2×4

5) اين يقع العنصر 3- يقع في الصف الثاني والعمود الثالث ويرمز له بالرمز b_{23}

6) اين يقع العنصر 1 يقع في الصف الثاني والعمود الثاني ويرمز له بالرمز b_{22}

7) ما قيمة العناصر التالية $b_{24} = -5$

$b_{13} = 0$

$b_{22} = 1$

$b_{11} = 3$

إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 9 & 8 \\ 7 & -3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كل عنصر ممّا يأتي:

1) الرتبة : 3×4

2) ما قيمة العناصر التالية $a_{31} = 7$

$a_{23} = 9$

$a_{14} = -2$

Scanned with CamScanner

أنواع خاصة من المصفوفات

مصفوفة صف (row matrix) هي التي تتكون من صف واحد فقط وعدة أعمدة	$A=[2 \quad -4 \quad 0 \quad 7]$
مصفوفة عمود (column matrix) هي التي تتكون من عمود واحد فقط وعدة صفوف	$B=\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$
المصفوفة المُربَّعة (square matrix) ← عدد الصفوف = عدد الأعمدة هي التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع الأعمدة	$C=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
المصفوفة الصفرية (zero matrix) هي التي جميع عناصرها (مدخلاتها) أصفارًا	$D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 2

أحدِّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$	$B=[4 \quad 5 \quad 7]$	$C=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$
النوع: مصفوفة مربعة الرتبة: 2X2	النوع: مصفوفة صف الرتبة: 1X3	النوع: مصفوفة عمود الرتبة: 4X1
$D=\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 12 & 9 & 5 \end{bmatrix}$	$E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$F=[-4 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \quad 0]$
النوع: مصفوفة مربعة الرتبة: 3X3	النوع: مصفوفة صفرية الرتبة: 2X3	النوع: مصفوفة صف الرتبة: 1X5

Scanned with CamScanner

✍ أتحقّق من فهمي

أُحدِّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$	$[6 \quad 10]$
النوع : مصفوفة عمود الرتبة : 4X1	النوع: مصفوفة مربعة الرتبة : 3X3	النوع: مصفوفة صف الرتبة : 1X2
$\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$	$[10]$
النوع: مصفوفة عمود الرتبة : 3X1	النوع : مصفوفة مربعة الرتبة : 4X4	النوع: مصفوفة صف وعمود ومربعة الرتبة : 1X1
$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$[0 \quad 3 \quad 5 \quad 2]$
النوع: مصفوفة لا يوجد لها نوع الرتبة : 2X3	النوع: مصفوفة صفرية ومربعة الرتبة : 2X2	النوع: مصفوفة صف الرتبة : 1X4

Scanned with CamScanner

المصفوفتان المُتساوِيتان (equal matrices) هما مصفوفتان لهما الرتبة نفسها، وعناصرهما المُتناظِرة مُتساوِية.

① ②

$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$
نفس الرتبة العناصر المتناظرة متساوية	العناصر المتناظرة ليست متساوية	الرتبة ليست نفسها

مثال 3 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 3y+10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ y & 1 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x و y؟

$x + 1 = 10$
$-1 \quad -1$

$\boxed{x = 9}$

$3y + 10 = y$
$-y \quad -y$

$2y + 10 = 0$

$\frac{2y}{2} = \frac{-10}{2}$

$\boxed{y = -5}$

Scanned with CamScanner

أتحقق من فهمي إذا كانت: $\begin{bmatrix} 3x-2 & 8 \\ 2 & 2x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x و y.

$3x - 2 = 13$
$+2 \quad +2$

$\frac{3}{3}x = \frac{15}{3}$

$\boxed{x = 5}$

$2x + 4y = 18$
$2(5) + 4y = 18$
$10 + 4y = 18$
$-10 \quad -10$

$\frac{4y}{4} = \frac{8}{4}$

$\boxed{y = 2}$

إذا كانت: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 4 & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x+2y & 4 \\ 3x-11 & 2 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x وy، وz.

$\boxed{z = 2}$

$4 = 3x - 11$
$+11 \quad +11$

$\frac{3}{3}x = \frac{15}{3}$

$\boxed{x = 5}$

$-1 = x + 2y$
$-1 = 5 + 2y$
$-5 \quad -5$

$\frac{2y}{2} = \frac{-6}{2}$

$\boxed{y = -3}$

Scanned with CamScanner

إذا كانت: $\begin{bmatrix} 9 & x^2 \\ 2-y & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2x+3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، وy.

$x^2 = 2x + 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ → 3×1

$(x - 3)(x + 1) = 0$

(x − 3: لبس — x + 1: صفر)

$x - 3 = 0$ or $x + 1 = 0$

$+3 \quad +3 \qquad -1 \quad -1$

$\boxed{x = 3}$ $\boxed{x = -1}$

إذا كانت: $\begin{bmatrix} x+2y & x-y \\ x+y+3z & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$ جد قيمة كلٍّ من x، وy، وz

$x + 2y = 13$ ——(1)

$x - y = 7$ ——(2)

$x + y + 3z = 2$ ——(3)

$x + 2y = 13 \rightarrow x + 2y = 13$

$-(x - y = 7) \qquad -x + y = -7$

$3y = 6 \rightarrow \boxed{y = 2}$

$x - y = 7$

$x - 2 = 7$

$+2 \quad +2$

$\boxed{x = 9}$

$x + y + 3z = 2$

$9 + 2 + 3z = 2$

$11 + 3z = 2$

$-11 \qquad -11$

$3z = -9 \rightarrow \boxed{z = -3}$

Scanned with CamScanner

تنظيم البيانات في المصفوفات وتحليلها

مثال : من الحياة

بيانات: يُبيِّن الجدول المجاور الأطوال والكتل والأعمار والصفوف الدراسية للشقيقات الثلاث هديل وهبه ولانا في إحدى المدارس:

	الطول (cm)	الكتلة (kg)	العمر (year)	الصف الدراسي
هديل	135	38	10	5
هبه	155	50	14	9
لانا	145	45	12	6

1) أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة رتبتها 3 × 4، بحيث يُمثِّل الطول والكتلة والعمر والصف الدراسي صفوف المصفوفة.

	هديل	هبه	لانا
طول	135	155	145
كتلة	38	50	45
عمر	10	14	12
الصف	5	9	6

2) أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

135 + 155 + 145 = 435

وهذا المجموع يمثل مجموع أطوال الشقيقات الثلاث.

3) أجد مجموع عناصر الصف الرابع، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

5 + 9 + 6 = 20

وهذا المجموع لا يمثل شيئاً ذا معنى

4) هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر الصف الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أُبرِّر إجابتي.

نعم، لأنه يدل على الوسط الحسابي لكل الشقيقات الثلاث.

Scanned with CamScanner

أتحقّق من فهمي

سياحة: يُبيِّن الجدول المجاور نتائج استطلاع آراء عيِّنات من سُكّان ثلاث قرى متجاورة بخصوص مشروع سياحي يُراد إقامته في موقع يتوسَّط هذه القرى:

	مُؤيِّد	مُعارِض	مُحايِد
القرية A	800	130	70
القرية B	460	250	40
القرية C	1300	700	200

a) أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة صفوفها القرى؛ على أنْ يكون عدد المُؤيِّدين مُرتَّبًا ترتيبًا تصاعديًّا.

مؤيد معارض محايد

$$\begin{matrix} \text{القرية B} \\ \text{القرية A} \\ \text{القرية C} \end{matrix}\begin{bmatrix} 460 & 250 & 40 \\ 800 & 130 & 70 \\ 1300 & 700 & 200 \end{bmatrix}$$

b) أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

460 + 250 + 40 = 750

وتمثل المجموع الذي تم استطلاع آرائهم به القرية B

c) أجد مجموع عناصر العمود الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

250 + 130 + 700 = 1080

وتمثل عدد المعارضين لإقامة المشروع السياحي الذين تم استطلاع آرائهم في القرى الثلاث.

d) هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر العمود الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أُبرِّر إجابتي.

نعم، لأنه يدل على الوسط الحسابي لعدد المعارضين في القرى الثلاثة.

Scanned with CamScanner

رياضيات الأعمال

رياضة: يُبيِّن الجدول المجاور إنجازات ثلاثة من لاعبي كرة القدم في مباريات دوري الصفوف في إحدى المدارس:

	الأهداف	التسديدات	المباريات
سمير	7	15	8
أحمد	13	25	11
فوّاز	9	20	14

أُنظِّم هذه البيانات في المصفوفة S ، بحيث تحوي صفوفها إنجازات اللاعبين الثلاثة، ويُرتَّب فيها عدد الأهداف تنازليًّا، ثمَّ أجد قيمة العنصر S_{32}.

الأهداف / التسديدات / المباريات

أحمد
فوّاز
سمير

$$S = \begin{bmatrix} 11 & 25 & 13 \\ 14 & 20 & 9 \\ 8 & 15 & 7 \end{bmatrix}$$

$$S_{32} = 15$$

أجد مجموع عناصر الصف الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

$14 + 20 + 9 = 43$

ولا معنى له.

أجد مجموع عناصر العمود الثالث، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

$13 + 9 + 7 = 29$

ويمثل عدد الأهداف المسجلة من قبل اللاعبين الثلاثة

Scanned with CamScanner

رياضيات الأعمال

كهربائيات: تتوزّع 3 مستودعات لإحدى وكالات تجارة الأجهزة الكهربائية في 3 مدن. يوجد في مستودع المدينة الأولى 200 ثلّاجة، و380 غسّالة، و250 شاشة، و300 مروحة، ويوجد في مستودع المدينة الثانية 160 ثلّاجة، و540 غسّالة، و290 مروحة، ويوجد في مستودع المدينة الثالثة 120 ثلّاجة، و280 غسّالة، و400 شاشة، و470 مروحة:

أُنظِّم هذه البيانات في مصفوفة تُمثِّل أعمدتها أنواع الأجهزة الكهربائية، ثمَّ أُحدِّد رتبة المصفوفة الناتجة.

مروحة شاشة غسّالة ثلاجة

مستودع المدينة الأولى
" " الثانية
" " الثالثة

$$\begin{bmatrix} 200 & 380 & 250 & 300 \\ 160 & 540 & 0 & 290 \\ 120 & 280 & 400 & 470 \end{bmatrix}$$

الرتبة هي: 3×4

أجمع عناصر كل صف، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

$200 + 380 + 250 + 300 = 1130$ وتمثل عدد الأجهزة الكهربائية في مستودع المدينة الأولى

$160 + 540 + 290 = 990$ " " " " " " الثانية

$120 + 280 + 400 + 470 = 1270$ " " " " " " الثالثة

أجمع عناصر كل عمود، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

$200 + 160 + 120 = 480$ وتمثل عدد الثلاجات في المستودعات الثلاثة

$380 + 540 + 280 = 1200$ " " الغسالات " "

$250 + 400 = 650$ " " الشاشات " "

$300 + 290 + 470 = 1060$ " " المراوح " "

Scanned with CamScanner

تبرير: أُبيّن إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرّر إجابتي.

إذا كان للمصفوفة A والمصفوفة B العدد نفسه من العناصر، فإنَّ $A = B$.

العبارة صحيحة أحيانًا

مثلاً: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ وكانت $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ نلاحظ بأنه المصفوفتين العدد نفسه من العناصر لكن المصفوفتين غير متساويتين لأن العناصر المتناظرة غير متساوية.

أما إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ فالمصفوفتان متساويتان لأن العناصر المتناظرة متساوية

مسألة مفتوحة: أُنشِئ مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 3، وأُسمّيها A، بحيث يكون $a_{ij} = a_{ji}$، لكلِّ من i, j.

$a_{12} = a_{21}$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

إجابة محتملة: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

تبرير: إذا كان عدد عناصر المصفوفة B عددًا أوّليًّا، فماذا يُمكِن أنْ تكون رتبتها؟ أُبرّر إجابتي.

إرشاد: العدد الأوّليّ هو عدد أكبر من 1، وله عاملان فقط، هما: العدد 1، ونفسه.

* عدد عناصر المصفوفة ليساوي حاصل ضرب عدد صفوفها بعدد أعمدتها
* بما أن عدد العناصر أولي، فهو ليساوي العدد واحد ضرب العدد الأولي نفسه أو العكس.
* إذن إذا كان عدد العناصر n وهو أولي فإن رتبة المصفوفة إما تكون $n \times 1$ أو $1 \times n$

Scanned with CamScanner

تبرير: إذا كانت المسافة بين إربد وعمّان 88 km، والمسافة بين عمّان والعقبة 324 km، والمسافة بين إربد والعقبة 408 km، فأُنشِئ مصفوفة رتبتها 3 × 3 لتمثيل المسافات بين المدن الثلاث، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

	عمان	العقبة	اربد
اربد	88	408	0
عمان	0	324	88
العقبة	324	0	408

$$\begin{bmatrix} 88 & 408 & 0 \\ 0 & 324 & 88 \\ 324 & 0 & 408 \end{bmatrix}$$

تحدٍّ: أكتب المصفوفة B، حيث: $b_{ij} = 2i - j$ لكل $i \in \{1, 2, 3\}$، ولكل $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$b_{11} = 2(1) - 1 = 1$
$b_{12} = 2(1) - 2 = 0$
$b_{13} = 2(1) - 3 = -1$
$b_{14} = 2(1) - 4 = -2$
$b_{21} = 2(2) - 1 = 3$
$b_{22} = 2(2) - 2 = 2$
$b_{23} = 2(2) - 3 = 1$
$b_{24} = 2(2) - 4 = 0$
$b_{31} = 2(3) - 1 = 5$
$b_{32} = 2(3) - 2 = 4$
$b_{33} = 2(3) - 3 = 3$
$b_{34} = 2(3) - 4 = 2$

سُئِلت الأُسَر في مدينتين عن مصدر التدفئة الذي تستعمله في فصل الشتاء، ثمَّ سُجِّلت النتائج في الجدول المجاور الذي يُبيِّن عدد الأُسَر التي تستعمل كل مصدر. كيف يُمكِن عرض بيانات الجدول بصورة أُخرى مُختصَرة؟

	الغاز	الكهرباء	الكاز	أُخرى
المدينة A	3256	1678	4589	1253
المدينة B	4560	978	5874	2564

$$\begin{bmatrix} 3256 & 1678 & 4589 & 1253 \\ 4560 & 978 & 5874 & 2564 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

الدرس 2

العمليات على المصفوفات
Operations on Matrices

جمع المصفوفات وطرحها

يُمكِن جمع مصفوفتين (adding two matrices) أو طرحهما (subtracting two matrices) إذا وفقط إذا كانت لهما **الرتبة نفسها** وذلك بجمع العناصر المُتناظِرة في المصفوفتين في حالة الجمع، وطرح هذه العناصر في حالة الطرح.

مثال 1

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ -1 & -5 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 0\\ -7 & 6\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 7 & 6\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\\ -9 & 1\end{bmatrix}$

فأجد ناتج كلٌّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1) $A+C$

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ -1 & -5 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 7 & 6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2+3 & 4+-1 & 6+2\\ -1+4 & -5+7 & 4+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 8\\ 3 & 2 & 10\end{bmatrix}$$

2) $A+B$

لا يمكن جمعها لأنه الرتبة ليس نفسي

Scanned with CamScanner

3) $B-D$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-2 & -2-4 \\ 3-5 & 0-3 \\ -7-9 & 6-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

4) $C-A$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1-4 & 2-6 \\ 4-(-1) & 7-(-5) & 6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 5 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

5) $D+B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 4+(-2) \\ 5+3 & 3+0 \\ -9+(-7) & 1+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \\ -16 & 7 \end{bmatrix}$$

6) $C+D$

لا يمكن جمعهما لأن الرتبة ليس نفسها

$$\begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

رياضيات الأعمال

أتدرّب وأحلّ المسائل أجد ناتج كلٌّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 6 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 9 & 6 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ بما أنه المصفوفتين من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن جمعهما.

3) $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 22 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 25 & 10 & 13 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31 & 26 & -9 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 36 & 4 \\ 7 & 9 & 21 \end{bmatrix}$

6) $[32 \quad -12 \quad 8] - [-6 \quad 43 \quad -7] = [38 \quad -55 \quad 15]$

Scanned with CamScanner

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

مثال 2

إذا كان: $C=\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 3 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}$، فأجد $5C$

$$\begin{bmatrix}-10 & 35\\ 15 & 20\\ 30 & 25\end{bmatrix}$$

إذا كان: $D=\begin{bmatrix}0 & 4 & -3\\ 7 & -2 & 1\\ 8 & 10 & 6\end{bmatrix}$، فأجد

1) $3D$ $\quad 3\begin{bmatrix}0 & 4 & -3\\ 7 & -2 & 1\\ 8 & 10 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 12 & -9\\ 21 & -6 & 3\\ 24 & 30 & 18\end{bmatrix}$

2) $-2D$ $\quad -2\begin{bmatrix}0 & 4 & -3\\ 7 & -2 & 1\\ 8 & 10 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -8 & 6\\ -14 & 4 & -2\\ -16 & -20 & -12\end{bmatrix}$

3) $1.5D$ $\quad 1.5\begin{bmatrix}0 & 4 & -3\\ 7 & -2 & 1\\ 8 & 10 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 6 & -4.5\\ 10.5 & -3 & 1.5\\ 12 & 15 & 9\end{bmatrix}$

Scanned with CamScanner

رياضيات الأعمال

اتدرب واحل المسائل أجد ناتج كلٌ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1) $3\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -6 \\ 12 & 3 \\ 18 & -9 \end{bmatrix}$

2) $\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -14 \\ 6 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$

3) $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 12 & -32 \\ 9 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 16 \\ -\frac{9}{2} & -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Scanned with CamScanner

خصائص العمليات على المصفوفات

مفهوم أساسي

خصائص العمليات على المصفوفات

إذا كان A, B, C ثلاث مصفوفات لها الرتبة نفسها، وكان k, h عددين حقيقيين، فإنَّ:

1. $A+B=B+A$ — الخاصية التبديلية لجمع المصفوفات
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ — الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات
3. $k(A+B)=kA+kB$ — خاصية توزيع الضرب في ثابت

مثال 3

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 12 & 5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}4 & 7\\ -8 & 1\end{bmatrix}$ فأجد $3A+2B-5C$.

$$3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0 & 8\\ 12 & 5\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}4 & 7\\ -8 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 6\\ 12 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 16\\ 24 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-20 & -35\\ 40 & -5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-17 & -13\\ 76 & 14\end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

رياضيات الأعمال

تحقق من فهمي

إذا كان: $E=\begin{bmatrix}5\\-3\\9\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}6\\8\\12\end{bmatrix}, G=[3 \quad 0 \quad 7], H=[6 \quad -4 \quad 9]$ ، فاجد كُلًا مما يأتي (إنْ أمكن):

1) $4E-3F$

$$4\begin{bmatrix}5\\-3\\9\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}6\\8\\12\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}20\\-12\\36\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}18\\24\\36\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\-36\\0\end{bmatrix}$$

2) $2G+6F$

$$2[3 \quad 0 \quad 7]+6\begin{bmatrix}6\\8\\12\end{bmatrix}$$

بما أنه F, G مصفوفتين مختلفتين، فلا يمكنه إيجاد 2G + 6F

3) $5(G+H)$

$$5[9 \quad -4 \quad 16]$$

$$=[45 \quad -20 \quad 80]$$

Scanned with CamScanner

أتدرّب وأحلّ المسائل أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1) $2\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 4 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 9 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & -4 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$$

2) $-4\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -2 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 & 10 \\ 5 & -4 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}\right)$

$$-4\begin{bmatrix} -9 & -5 & -4 \\ -7 & 11 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 36 & 20 & 16 \\ 28 & -44 & -12 \\ 8 & -16 & 8 \end{bmatrix}$$

3) $2\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 12 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 0 & -3 \\ 12 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 15 & -10 \\ -30 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 17 & 19 \\ 27 & -7 \\ -18 & -1 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}$ فأجد كُلًا مما يأتي (إن أمكن):

1) $4A+3B$

$$4\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

لا يمكن لأنه المرتب مختلفة

2) $2C-3A$

$$2\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6 & 4\\ 0 & -18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-12 & 6\\ 9 & -30\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-6 & 10\\ 9 & -48\end{bmatrix}$$

3) $1B+1.5B$

$2.5B$

$$2.5\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}10 & -2.5 & -12.5\\ 7.5 & 5 & 20\end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

4) $3B + 2C$

لا يمكن جمعهما لاختلاف الرتب

5) $2A - C$

$$2\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -6 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 29 \end{bmatrix}$$

6) $4A + 3C$

$$4\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -12 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 0 & -27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 25 & -2 \\ -12 & 13 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

مثال : من الحياة

تجارة: لدى إحدى الشركات التجارية فرعان في مدينة عمّان، وفرعان آخران في مدينة إربد. إذا مثّلت المصفوفة A والمصفوفة B مُعدَّل المبيعات والأرباح اليومية من الأدوات الكهربائية (بمئات الدنانير) في كلٍّ من فرعي هاتين المدينتين على الترتيب، فأجد المصفوفة C التي تُمثِّل مُعدَّل المبيعات والأرباح الشهرية لفروع الشركة في المدينتين معًا (بافتراض أنَّ الشهر 30 يومًا).

لـ ×30

$$A=\begin{matrix}\text{المبيعات} & \text{الأرباح} \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} 56 & 4 \\ 45 & 3.5 \end{bmatrix}\begin{matrix}\text{عمّان 1} \\ \text{عمّان 2}\end{matrix}$$

$$B=\begin{matrix}\text{المبيعات} & \text{الأرباح} \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} 48 & 3 \\ 66 & 9 \end{bmatrix}\begin{matrix}\text{إربد 1} \\ \text{إربد 2}\end{matrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 104 & 7 \\ 111 & 12.5 \end{bmatrix}$$

$$C = 30(A+B)$$

$$= 30\begin{bmatrix} 104 & 7 \\ 111 & 12.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3120 & 210 \\ 3330 & 375 \end{bmatrix}$$

تمثل المبيعات والأرباح الشهرية لفروع الشركة في المدينتين معًا بمئات الدنانير.

$$\begin{bmatrix} 3120 & 210 \\ 3330 & 375 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

أتحقق من فهمي

زراعة: يملك كلٌّ من راشد وحمد مزرعة في الأغوار، ومزرعة أُخرى في المفرق. إذا مثَّلت المصفوفة A مُعدَّل الإنتاج اليومي (بالكيلوغرام) لمزرعتيهما في الأغوار من البندورة والباذنجان والفلفل، ومثَّلت المصفوفة B مُعدَّل الإنتاج اليومي (بالكيلوغرام) لمزرعتيهما في المفرق من الأصناف نفسها، فأجد المصفوفة C التي تُمثِّل مُعدَّل الإنتاج الأسبوعي (بالكيلوغرام) لمزرعتي راشد وحمد في الموقعين معًا.

$$A=\begin{matrix} \\ \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix} 200 & 500 & 100 \\ 260 & 430 & 245 \end{bmatrix}\end{matrix}\begin{matrix} \text{بندورة} & \text{باذنجان} & \text{فلفل} \end{matrix}$$

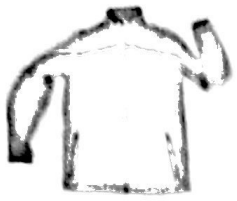
$$B=\begin{matrix} \\ \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix} 130 & 100 & 300 \\ 240 & 300 & 175 \end{bmatrix}\end{matrix}\begin{matrix} \text{بندورة} & \text{باذنجان} & \text{فلفل} \end{matrix}$$

$$7(A+B)$$

$$7\begin{bmatrix} 330 & 600 & 400 \\ 500 & 730 & 420 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2310 & 4200 & 2800 \\ 3500 & 5110 & 2940 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner



رياضة: لدى مَحَلّ تجهيزات رياضية فرع في مدينة الكرك، وفرع آخر في مدينة الطفيلة. إذا مثّلت المصفوفة A عدد البدلات الرياضية التي باعها الفرعان من جميع المقاسات (صغيرة، مُتوسّطة، كبيرة) في شهر نيسان عام 2024 م، ومثّلت المصفوفة B عدد البدلات التي باعها الفرعان من المقاسات الثلاثة في شهر نيسان عام 2023 م، فأجد المصفوفة التي تُمثّل ما باعه كلٌّ من الفرعين في الشهرين معًا.

$$A=\begin{array}{c} \text{صغير} \quad \text{مُتوسّط} \quad \text{كبير} \\ \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 30 & 17 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{array}, \quad B=\begin{array}{c} \text{كبير} \quad \text{مُتوسّط} \quad \text{صغير} \\ \begin{bmatrix} 23 & 42 & 18 \\ 21 & 25 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{array}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 38 & 57 & 33 \\ 32 & 55 & 38 \end{bmatrix}$$

مدارس: يُبيّن الجدول المجاور محتويات مختبري الحاسوب في إحدى المدارس عام 2024 م. تُخطّط إدارة المدرسة لزيادة هذه المحتويات بما نسبته 40%. أكتب مصفوفة تُمثّل ما يجب شراؤه للمختبرين، ومصفوفة أُخرى تُمثّل محتويات المختبرين بعد عملية الشراء.

	أجهزة حاسوب	طاولات	مقاعد
المختبر A	15	20	30
المختبر B	20	25	40

$40\% = \frac{40}{100} = 0.4$

$$0.4\begin{bmatrix} 15 & 20 & 30 \\ 20 & 25 & 40 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 8 & 10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15+6 & 20+8 & 12+30 \\ 20+8 & 25+10 & 40+16 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 21 & 28 & 42 \\ 28 & 35 & 56 \end{bmatrix}$$

1.4C

Scanned with CamScanner

مهارات التفكير العليا

تبرير: أُحدِّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

إذا كان عدد عناصر المصفوفة A مُساوِيًا لعدد عناصر المصفوفة B، فإنَّه يُمكِن إيجاد $A + B$.

صحيحة أحياناً لأنه إذا كان عدد عناصر المصفوفتين متساوياً، فقد تكون المصفوفتان متساويتين وعندها يمكن إيجاد ناتج جمع المصفوفتين.
أما إذا كان عدد عناصر المصفوفتين متساوياً والرتبتان مختلفتان فلا يمكن إيجاد ناتج جمعهما.

أكتشف الخطأ: ما الخطأ في الحلِّ الآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 0 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفتين من رتبتين، فلا يمكن جمعهما.

مسألة مفتوحة: أكتب المصفوفتين A, B، بحيث يكون: $3A + 2B = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 6 & -5 & 11 \end{bmatrix}$

$$3\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 1.5 & 3.5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 6 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 1.5 & 3.5 & -2 \end{bmatrix}$$

تحدٍّ: أجد المصفوفتين X, Y اللتين تُحقِّقان المعادلتين الآتيتين:

$$X-2Y=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 9\end{bmatrix}, 3X+4Y=\begin{bmatrix}8 & 5\\ -31 & 12\end{bmatrix}$$

$$X-2Y=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 9\end{bmatrix} \quad \text{——(1)}$$

$$3X+4Y=\begin{bmatrix}8 & 5\\ -31 & 12\end{bmatrix} \quad \text{——(2)}$$

نضرب المعادلة الأولى بالعدد 2

$$2X-4Y=\begin{bmatrix}2 & 10\\ -4 & 18\end{bmatrix}$$

$$+\quad 3X+4Y=\begin{bmatrix}8 & 5\\ -31 & 12\end{bmatrix}$$

$$5X=\begin{bmatrix}10 & 15\\ -35 & 30\end{bmatrix}$$ نقسم على 5

$$\frac{5X}{5}=\begin{bmatrix}\frac{10}{5} & \frac{15}{5}\\ -\frac{35}{5} & \frac{30}{5}\end{bmatrix} \rightarrow X=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -7 & 6\end{bmatrix}$$

نعوض في المعادلة (2) لإيجاد Y

$$3\begin{bmatrix}2 & 3\\ -7 & 6\end{bmatrix}+4Y=\begin{bmatrix}8 & 5\\ -31 & 12\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6 & 9\\ -21 & 18\end{bmatrix}+4Y=\begin{bmatrix}8 & 5\\ -31 & 12\end{bmatrix}$$

$$4Y=\begin{bmatrix}8 & 5\\ -31 & 12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 9\\ -21 & 18\end{bmatrix}$$

$$4Y=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 9 & -6\end{bmatrix}$$

نقسم على 4

$$\frac{4Y}{4}=\begin{bmatrix}\frac{2}{4} & \frac{-4}{4}\\ \frac{9}{4} & \frac{-6}{4}\end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ \frac{9}{4} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix}0.5 & -1\\ 2.5 & -1.5\end{bmatrix}$$

22

تُمثِّل المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}0.4 & 0.75\\ 0.6 & 1\\ 1.5 & 2.5\end{bmatrix}$ أسعار البيع (بالدينار) لثلاثة مشروبات (شاي، قهوة، عصير) بأكواب صغيرة وأُخرى كبيرة في أحد الأكشاك. وقد قرَّر صاحب الكشك رفع الأسعار بما نسبته 20%؛ نظرًا إلى زيادة التكاليف. ما المصفوفة التي تُمثِّل الأسعار الجديدة؟

$$1.2\begin{bmatrix}0.4 & 0.75\\ 0.6 & 1\\ 1.5 & 2.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.48 & 0.9\\ 0.72 & 1.2\\ 1.8 & 3\end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

شروط ضرب المصفوفات

يُمكِن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى مُساوِيًا لعدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة A التي رتبتها $m \times n$ في المصفوفة B التي رتبتها $n \times r$، فإنَّ رتبة المصفوفة الناتجة $A \times B$ هي: $m \times r$.

$$\underset{m \times n}{A} \times \underset{n \times r}{B} = \underset{m \times r}{AB}$$

مُتساوِيان — رتبة AB

مثال 1

إذا كانت $A_{2\times3}$، وكانت $B_{2\times2}$، وكانت $C_{3\times2}$، فأُبيِّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

1) AB

$$\underset{2\times3}{A} \times \underset{2\times2}{B}$$

غير مُتساوِيين

2) AC

$$\underset{2\times3}{A} \times \underset{3\times2}{C} = \underset{2\times2}{A\times C}$$

مُتساوِيان — رتبة $A \times C$

Scanned with CamScanner

أتحقّق من فهمي

إذا كانت $A_{2\times2}$، وكانت $B_{3\times2}$، وكانت $C_{2\times3}$، فأُبيّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

a) AB

$A_{2\times2} \times B_{3\times2}$

غير متساوية

b) BC

∴ لا يمكن

$B_{3\times2} \times C_{2\times3} = BXC_{3\times3}$

c) CA

$C_{2\times3} \times A_{2\times2}$

غير متساوية

∴ لا يمكن

أتدرّب وأحلّ المسائل

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}4&0\\2&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&-3\\-2&2\\1&0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0.5&3&0\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2&-1.5&-1\\0.5&0&2\\1.5&-1&1\end{bmatrix}$، فأُبيّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

1 AB	$A_{2\times2} \times B_{3\times2}$ لا يمكن	5 CD	$C_{2\times3} \times D_{3\times3} = CXD_{2\times3}$
2 BC	$B_{3\times2} \times C_{2\times3} \rightarrow BXC_{3\times3}$	6 BB	$B_{3\times2} \times B_{3\times2}$ = لا يمكن
3 DC	$D_{3\times3} \times C_{2\times3}$ = لا يمكن	7 CB	$C_{2\times3} \times B_{3\times2} = CB_{2\times2}$
4 BA	$B_{3\times2} \times A_{2\times2} = BXA_{3\times2}$	8 BCD	$B_{3\times2} \times C_{2\times3} \times D_{3\times3}$ $BC_{3\times3} \times D_{3\times3}$ $BCD_{3\times3}$

Scanned with CamScanner

مثال 2:

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4\\ -3 & 4 & 7\end{bmatrix}$، وكان: $B=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 0 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$، فأجد: AB.

$A=\begin{bmatrix}\boxed{1 & -5 & 4}\\ -3 & 4 & 7\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}\boxed{4} & -5\\ \boxed{0} & -1\\ \boxed{2} & 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\boxed{a_{11}\ 1\times4+-5\times0+4\times2} & \end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}\boxed{1 & -5 & 4}\\ -3 & 4 & 7\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4 & \boxed{-5}\\ 0 & \boxed{-1}\\ 2 & \boxed{0}\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} & \boxed{a_{12}\ 1\times-5+-5\times-1+4\times0}\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4\\ \boxed{-3 & 4 & 7}\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}\boxed{4} & -5\\ \boxed{0} & -1\\ \boxed{2} & 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\boxed{a_{21}\ -3\times4+4\times0+7\times2} & \end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4\\ \boxed{-3 & 4 & 7}\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4 & \boxed{-5}\\ 0 & \boxed{-1}\\ 2 & \boxed{0}\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} & \boxed{a_{22}\ -3\times-5+4\times-1+7\times0}\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\boxed{12} & \boxed{0}\\ \boxed{2} & \boxed{11}\end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

إتحقق من فهمي

a) إذا كان: $M=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$، وكان: $N=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 6 & -3\end{bmatrix}$، فأجد: MN.

$$MN=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 6 & -3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & 0\\ 6 & -3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\times4+-1\times6 & 3\times0+-1\times-3\\ 2\times4+5\times6 & 2\times0+5\times-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 38 & -15\end{bmatrix}$$

b) إذا كان: $C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$، وكان: $D=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$، فأجد: CD.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times2+0\times1 & 1\times1+0\times-1 & 1\times3+0\times0\\ 2\times2+1\times1 & 2\times1+1\times-1 & 2\times3+1\times0\\ 3\times2+2\times1 & 3\times1+2\times-1 & 3\times3+2\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 1 & 6\\ 8 & +1 & 9\end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

تدرّب وأحل المسائل أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إن أمكن):

1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$2\times2 \quad \times \quad 3\times2$

يعني

2) $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \times [2 \quad 5 \quad 3]$

$3\times1 \quad \times \quad 1\times3$

$$= \begin{bmatrix} 3\times2 & 3\times5 & 3\times3 \\ -4\times2 & -4\times5 & -4\times3 \\ 1\times2 & 1\times5 & 1\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 9 \\ -8 & -20 & -12 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

3) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3\times0+-1\times-2+2\times4 & 3\times3+-1\times1+2\times7 & 3\times2+-1\times5+2\times2 \\ 4\times0+2\times-2+0\times4 & 4\times3+2\times1+0\times7 & 4\times2+2\times5+0\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 22 & 5 \\ -4 & 14 & 18 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

4) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3\times5+0\times0 & 3\times0+0\times4 \\ 0\times5+2\times0 & 0\times0+2\times4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

5) $\begin{bmatrix} 8 & 10 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 8\times1+10\times-3+-7\times-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$$

6) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2\times-5+-1\times0 & -2\times6+-1\times6 & -2\times-4+-1\times3 \\ 9\times-5+-5\times0 & 9\times6+-5\times6 & 9\times-4+-5\times-3 \\ 3\times-5+1\times0 & 3\times6+-1\times6 & 3\times-4+-1\times-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -18 & 11 \\ -45 & -15 & -12 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

7) $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2x-1 & 2x4 \\ 5x-1 & 5x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -5 & 20 \end{bmatrix}$$

8) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -14 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2x8+4x-4 & 2x-14+4x7 \\ 0x8+3x-4 & 0x-14+3x7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -12 & 21 \end{bmatrix}$$

9) $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3x3+-1x2 & 3x-1+-1x5 \\ 2x3+5x2 & 2y-1+5x5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 16 & 23 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

10) $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^2$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

لا يمكن إيجاد الضرب

Scanned with CamScanner

مثال 3 : من الحياة

شطرنج: تنافست ثلاث فِرَق في البطولة النهائية لنادي الشطرنج، وقد دُوِّن عدد مَرّات الفوز والتعادل لهذه الفِرَق في الجدول المجاور. إذا علمْتُ أنَّ فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقاط، وأنَّ تعادله يعني حصوله على نقطة واحدة، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

الفريق	ربح	تعادل
A	5	4
B	6	3
C	4	5

مصفوفة المباريات

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

مصفوفة النقاط

$$N = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$MN = \begin{bmatrix} 5\times3+4\times1 \\ 6\times3+3\times1 \\ 4\times3+5\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 17 \end{bmatrix}$$

هذه مصفوفة النقاط التي حصل عليها كل فريق

معايني ان الفريق A أحرز على 19 نقطة

والفريق B أحرز 21 نقطة و الفريق C أحرز 17 نقطة

∴ الفريق B هو الفريق الفائز

؛ لأنه حصل على أكبر عدد من النقاط.

Scanned with CamScanner

أتحقّق من فهمي

كـرة قدم: يُبيِّن الجدول المجـاور نتائج 3 فِرَق لكرة القدم بعدمـا لعب كلٌّ منها 4 مباريات. إذا علمْـتُ أنَّ فوزَ الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقـاط، وأنَّ تعادله يعني حصوله على نقطـة واحـدة، وأنَّ خسـارته تعني عدم حصوله على أيِّ نقاط، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

الفريق	ربح	تعادل	خسارة
A	1	0	3
B	3	1	0
C	1	1	2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1\times3+0\times1+3\times0 \\ 3\times3+1\times1+0\times0 \\ 1\times3+1\times1+2\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

الفريق A حصد على 3 نقاط
الفريق B حصد على 10 نقاط
الفريق C حصد على 4 نقاط

∴ الفريق B هو الفائز لانه حصل على أكبر عدد من النقاط

Scanned with CamScanner

صناعة سيّارات: تتوزّع 3 مصانع لإحدى شركات صناعة السيّارات في 3 مدن، ويُبيّن الجدول المجاور عدد ما يُنتجه كل مصنع يوميًّا من 3 طرازات للسيّارات. إذا كان ربح الشركة في كل سيّارة من الطراز X هو JD1000، ومن الطراز D هو JD 2000، ومن الطراز R هو JD1500، فأستعمل ضرب المصفوفات في إيجاد ربح كل مصنع يوميًّا من جميع طرازات السيّارات (بافتراض أنَّ جميع السيّارات المُنتَجة مَبيعة).

	الطراز X	الطراز D	الطراز R
المدينة A	12	10	0
المدينة B	4	4	20
المدينة C	8	9	12

$$\begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12X1000 + 10X2000 + 0X1500 \\ 4X1000 + 4X2000 + 20X1500 \\ 8X1000 + 9X2000 + 12X1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32000 \\ 42000 \\ 44000 \end{bmatrix}$$

المصنع A ربح JD 32000

المصنع B ربح JD 42000

المصنع C ربح JD44000

Scanned with CamScanner

خصائص ضرب المصفوفات

مبرهنة (2-2)

تُعَدُّ الخصائص الآتية صحيحة لأيِّ ثلاث مصفوفات: R, S, T، ولأيِّ عدد حقيقي c، شرط أنْ تكون عمليتا الجمع والضرب مُعرَّفتين في جميع الحالات الآتية:

1. $(RS)T = R(ST)$ خاصية التجميع لضرب المصفوفات
2. $c(RS) = (cR)S = R(cS)$ خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد حقيقي
3. $R(S+T) = RS + RT$ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليسار
4. $(R+S)T = RT + ST$ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليمين

مثال 4

إذا كان: $R = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$، وكان: $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$، $k = 3$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $P(Q+R)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\times 3 + 0\times 5 & 2\times 2 + 0\times 3 \\ 1\times 3 + -1\times 5 & 1\times 2 + -1\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

2 $k(PQ)$

$$3\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$3\left(\begin{bmatrix}2\times3+0\times1 & 2\times4+0\times2\\ 1\times3+-1\times1 & 1\times4+-1\times2\end{bmatrix}\right)$$

$$3\left(\begin{bmatrix}6 & 8\\ 2 & 2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}18 & 24\\ 6 & 6\end{bmatrix}$$

3 $(PQ)R$

$$\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}0 & -2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}2\times3+0\times1 & 2\times4+0\times2\\ 1\times3+-1\times1 & 1\times4+-1\times2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6 & 8\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6\times0+8\times4 & 6\times-2+8\times1\\ 2\times0+2\times4 & 2\times-2+2\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & -4\\ 8 & -2\end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

أتحقق من فهمي

إذا كان: $H=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ ،$G=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ ،$F=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ وكان: $m=-4$، فأجد ثم

مما يأتي:

a) $(F+G)H$

$$\left(\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}4 & -1\\ 4 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\times7+-1\times4 & 4\times5+-1\times2\\ 4\times7+8\times4 & 4\times5+8\times2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}24 & 18\\ 60 & 36\end{bmatrix}$$

b) $(FG)H$

$$\left(\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}4\times0+-2\times1 & 4\times1+-2\times3\\ 3\times0+5\times1 & 3\times1+5\times3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 5 & 18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\times7+-2\times4 & -2\times5+-2\times2\\ 5\times7+18\times4 & 5\times5+18\times2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-22 & -14\\ 107 & 61\end{bmatrix}$$

c) $G(mH)$

$G(-4H)$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\times7 & -4\times5\\ -4\times4 & -4\times2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-28 & -20\\ -16 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\times-28+1\times-16 & 0\times-20+1\times-8\\ 1\times-28+3\times-16 & 1\times-20+3\times-8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-16 & -18\\ -76 & -44\end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

إذا كان: $P=\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ وكان: $2=m$، فأجد كلاً مما يأتي:

1) $(QR)P$

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\times-2+-1\times9+2\times3 & 3\times-1+-1\times-5+2\times-1\\ 4\times-2+2\times9+0\times3 & 4\times-1+2\times-5+0\times-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-9 & 0\\ 10 & -14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-9\times12+0\times9 & -9\times4+0\times3\\ 10\times12+-14\times9 & 10\times4+-14\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-108 & -36\\ -6 & -2\end{bmatrix}$$

2) $R(PQ)$

$$\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\times3+4\times4 & 12\times-1+4\times2 & 12\times2+4\times0\\ 9\times3+3\times4 & 9\times-1+3\times2 & 9\times2+3\times0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}52 & -4 & 24\\ 39 & -1 & 18\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2\times52+-1\times39 & -2\times-4+-1\times-1 & -2\times24+-1\times18\\ 9\times52+-5\times39 & 9\times-4+-5\times-1 & 9\times24+-5\times18\\ 3\times52+-1\times39 & 3\times-4+-1\times-1 & 3\times24+-1\times18\end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

3) $n(PQ)$

$$2\left(\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$-2\left(\begin{bmatrix}12\times3+4\times4 & 12\times-1+4\times2 & 12\times2+4\times0\\ 9\times3+3\times4 & 9\times-1+3\times2 & 9\times2+3\times0\end{bmatrix}\right)$$

$$-2\begin{bmatrix}52 & -4 & 24\\ 39 & -3 & 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-104 & 8 & -48\\ -78 & 6 & -36\end{bmatrix}$$

4) $(nR)P$

$$\left(-2\times\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}+4 & 2\\ -18 & 10\\ -6 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}66 & 22\\ -126 & -42\\ -54 & -18\end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

اتدرّب واحلّ المسائل

دوَّنت سلمى في الجدول المجاور عدد ما باعته في متجرها من أكواب حافظة للحرارة مُتعدِّدة الحجوم (كبيرة، مُتوسِّطة، صغيرة) في أحد الأيام. كذلك دوَّنت طريقة بيع هذه الأكواب؛ وهي إمّا مباشرة من المتجر، وإمّا عبر شبكة الإنترنت. إذا كان سعر الكوب الكبير JD 4.5، وسعر الكوب المُتوسِّط JD 4، وسعر الكوب الصغير JD 3.5، فكيف يُمكِن استعمال ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الذي حصلت عليه سلمى من بيع الأكواب بكلتا طريقتي البيع؟

حجم الكوب	كبير	مُتوسِّط	صغير
عبر شبكة الإنترنت	5	4	2
من المتجر	3	5	9

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4.5 \\ 4 \\ 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.5 \\ 65 \end{bmatrix}$$

$$A_{4\times3} \cdot B_{3\times5} = C_{4\times5}$$

إذا كان: $AB = C$، وكانت رتبة المصفوفة A هي: 3×4، ورتبة المصفوفة C هي: 5×4، فما رتبة المصفوفة B؟

عندما نضرب A في B للحصول على المصفوفة $C = AB$
فإن عدد أعمدة B يساوي عدد أعمدة A أي 3
وكذلك عدد أعمدة B يساوي عدد أعمدة C أي 5
∴ رتبة B هي 3×5

Scanned with CamScanner

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}5 & 8\\ -3 & -5\end{bmatrix}$، فأبيّن أنّ: $AB = AC$.

$$AB=\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12\times4+4\times0 & 12\times6+4\times1\\ 9\times4+3\times0 & 9\times6+3\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}48 & 76\\ 36 & 57\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 8\\ -3 & -5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\times12+6\times9 & 4\times4+6\times3\\ 0\times12+1\times9 & 0\times4+1\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}48 & 76\\ 36 & 57\end{bmatrix}$$

$AB = AC$ ∴ ✓

أكتشف الخطأ: حَسَبت كلٌّ من رنا وعبير العنصر c_{23} في المصفوفة: $C=\begin{bmatrix}5 & 7 & 12\\ -2 & 3 & 4\\ 6 & 9 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 8 & 4\\ 1 & -2 & -6\\ 11 & 3 & 5\end{bmatrix}$ كما يأتي:

إجابة عبير

$c_{23} = 12 - 8 - 18$

$= -14$

إجابة رنا

$c_{23} = -8 - 18 + 20$

$= -6$ ✓

أيهما إجابتها صحيحة؟ أبرّر إجابتي. لنتبع C_{23} عند طريق ضرب الصف الثاني من المصفوفة الأولى بالعمود الثالث من المصفوفة الثانية.
نستنتج إجابة رنا هي الصحيحة

Scanned with CamScanner

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ x & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ y & 4\end{bmatrix}$، حيث x, y عددان صحيحان موجبان، فأجد:

AB بدلالة x, y.

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ x & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ y & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times-2+0\times y & 2\times0+0\times4\\ x\cdot-2+3y & x\cdot0+3\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ -2x+3y & 12\end{bmatrix}$$

BA بدلالة x, y.

$$BA=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ y & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ x & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2\times2+0\cdot x & -2\times0+0\times3\\ y\cdot2+4x & y\cdot0+4\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 2y+4x & 12\end{bmatrix}$$

أصغر قيمة صحيحة موجبة لكلٍّ من x، و y التي تجعل $AB=BA$.

$$AB=BA\Longrightarrow\begin{bmatrix}-4 & 0\\ -2x+3y & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 2y+4x & 12\end{bmatrix}$$

$$-2x+3y=2y+4x$$
$$+2x\quad -2y\quad -2y\quad +2x$$

$$y=6x$$

اصغر صيغة $x=1$

$y=6$

Scanned with CamScanner

رياضيات الأعمال

تحدٍّ: أجد قيمة كلٍّ من e, f, g, h التي تجعل المعادلة الآتية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$3e + 4g = 1$ ——— (1)

$3f + 4h = 12$ ——— (2)

$-e + 5g = 6$ ——— (3)

$-f + 5h = 15$ ——— (4)

$3e + 4g = 1$

$3(-e + 5g = 6)$ $\xrightarrow{+}$

$3e + 4g = 1$

$-3e + 15g = 18$

$\frac{19g}{19} = \frac{19}{19} \rightarrow \boxed{g = 1}$

نعوض في (1)

$3e + 4(1) = 1$

$3e + 4 = 1$

$-4 \quad -4$

$\frac{3e}{3} = \frac{-3}{3} \rightarrow \boxed{e = -1}$

$3f + 4h = 12$

$3(-f + 5h = 15)$ $\xrightarrow{+}$

$3f + 4h = 12$

$3f + 15h = 45$

$\frac{19h}{19} = \frac{57}{19}$

$\boxed{h = 3}$

$3f + 4(3) = 12$

$3f + 12 = 12$

$-12 \quad -12$

$\frac{3f}{3} = \frac{0}{3}$

$\boxed{f = 0}$

Scanned with CamScanner

تبرير: إذا كان A, B مصفوفتين مُربَّعتين من الرتبة n، فلماذا $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$؟

$$(A+B)^2 = (A+B)\times(A+B)$$
$$= A^2 + AB + BA + B^2$$

$AB \neq BA$ لكن

$$\therefore (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

مسألة مفتوحة: أكتب المصفوفتين A, B غير الصفريتين، بحيث يكون $AB = BA$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner