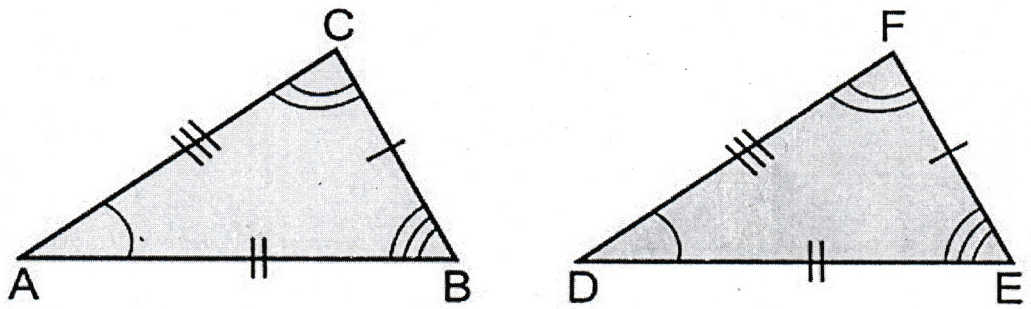
الوحدة الرابعة

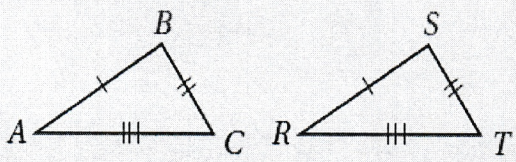
المثلثات المتطابقة



$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

الدرس الأول: تطابق المثلثات SSS	الوحدة الرابعة: المثلثات المتطابقة	النتاج: يثبت تطابق مثلثات بحالة SSS

مسلمةٌ — التطابقُ بثلاثةِ أضلاعٍ (SSS)

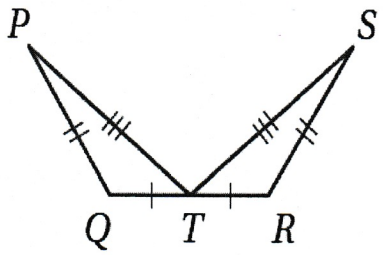


- **بالكلماتِ:** إذا تطابقَتْ أضلاعُ مثلثٍ مَعَ الأضلاعِ المناظرةِ لَها في مثلثٍ آخَرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ SSS
- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\overline{AB} \cong \overline{RS}, \overline{BC} \cong \overline{ST}, \overline{AC} \cong \overline{RT}$

فإنَّ: $\Delta ABC \cong \Delta RST$

مثال

أثبت أن المثلثين QPT Δ و RST Δ المبينين في الشكل المجاور متـ



$\overline{RS} \cong \overline{PQ}$ (مُعطى بالسؤال)

$\overline{TQ} \cong \overline{TR}$ (مُعطى بالسؤال)

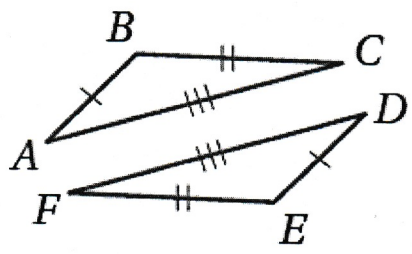
$\overline{TS} \cong \overline{TP}$ (مُعطى بالسؤال)

إذاً $\Delta QPT \cong \Delta RST$ بحالة SSS

تدريبات

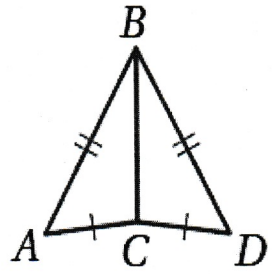
أبين أن كل زوج من المثلثات الآتية متطابق أم لا، مبرراً إجابتي:

1)



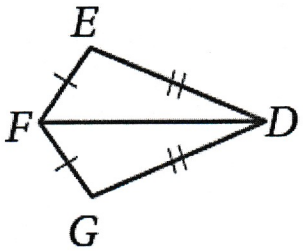
العبارات	المبررات
$\overline{AC} \cong \overline{FD}$	معطى بالسؤال
$\overline{DE} \cong \overline{AB}$	معطى بالسؤال
$\overline{BC} \cong \overline{FE}$	معطى بالسؤال
$\Delta FED \cong \Delta BCA$ بنتج أن SSS حسب مسلمة	

(2)



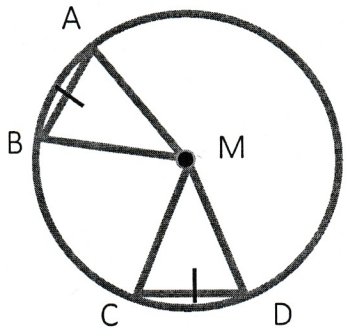
العبارات	المبررات
$\overline{BD} \cong \overline{BA}$	معطيات السؤال
$\overline{AC}$	ضلع مشترك
$\overline{AC} \cong \overline{CD}$	معطيات السؤال
$\triangle BCD \cong \triangle BCA$ ينتج أن SSS حسب مسلمة	

(3)



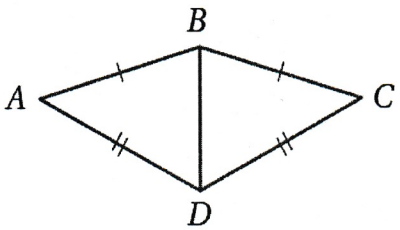
العبارات	المبررات
$\overline{FD} \cong \overline{DG}$	معطيات السؤال
$\overline{EF} \cong \overline{FG}$	معطيات السؤال
$\overline{FD}$	ضلع مشترك
$\triangle DFE \cong \triangle DFG$ ينتج أن SSS حسب مسلمة	

(4)



العبارات	المبررات
$\overline{BM} \cong \overline{CM}$	أنصاف أقطار
$\overline{AM} \cong \overline{DM}$	أنصاف أقطار
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	معطيات السؤال
$\triangle ABM \cong \triangle DCM$ ينتج أن SSS حسب مسلمة	

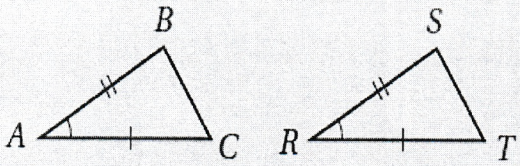
(5)



العبارات	المبررات
$\overline{AC} \cong \overline{AB}$	معطيات السؤال
$\overline{DC} \cong \overline{DA}$	معطيات السؤال
$\overline{AD}$	ضلع مشترك
$\triangle BDA \cong \triangle BDC$ ينتج أن SSS حسب مسلمة	

مسلمةٌ التطابقُ بضلعَينِ وزاويةٍ محصورةٍ بينَهُما (SAS)

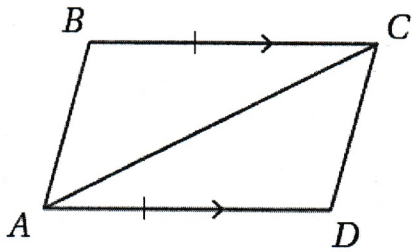
- **بالكلماتِ:** إذا تطابقَ ضلعانِ والزاويةُ المحصورةُ بينَهُما في مثلثٍ مَعَ نظائِرِها في مثلثٍ آخرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ. وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ SAS.



- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\overline{AC} \cong \overline{RT}$ ، $\overline{AB} \cong \overline{RS}$ ، $\angle A \cong \angle R$ ، فإنَّ: $\Delta ABC \cong \Delta RST$

مثال

أثبت أن المثلثين Δ CDA وΔABC المبينين في الشكل المجاور متطابقان.

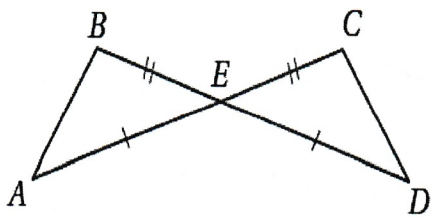


$\overline{DA} \cong \overline{BC}$ (مُعطى بالسؤال)
$AC \cong AC$ (ضلع مشترك)
$\angle DAC \cong \angle BCA$ (زاويتان متبادلتان داخلياً)
إذاً المثلثين $\Delta CDA \cong \Delta ABC$ بحالة SAS

تدريبات

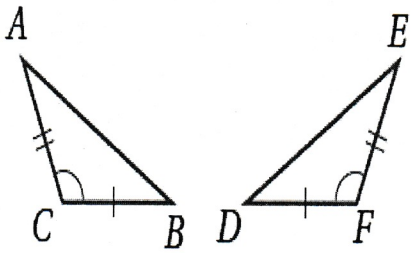
بين أن كل زوج من المثلثات الآتية متطابق أم لا، مبرراً إجابتي:

1)



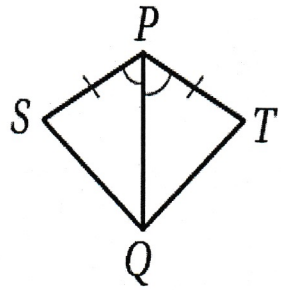
العبارات	المبررات
$\overline{EC} \cong \overline{BE}$	معطيات السؤال
$\overline{ED} \cong \overline{EA}$	معطيات السؤال
$\angle CED \cong \angle BEA$	التقابل بالرأس
$\Delta ECD \cong \Delta EBA$ ينتج أن SAS حسب مسلمة	

(2



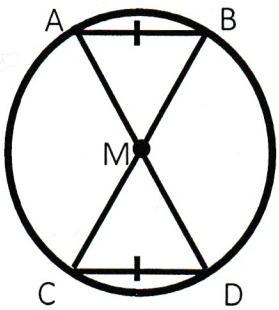
العبارات	المبررات
$\overline{AC} \cong \overline{EF}$	معطيات السؤال
$\overline{BC} \cong \overline{FD}$	معطيات السؤال
$\angle ACB \cong \angle EFD$	معطيات السؤال
$\Delta BCA \cong \Delta DFE$ بنتج أن	حسب مسلمة SAS

(3



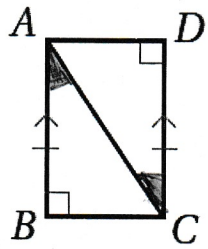
العبارات	المبررات
$\overline{PT} \cong \overline{PS}$	معطيات السؤال
$\overline{PQ}$	ضلع مشترك
$\angle TPQ \cong \angle SPQ$	معطيات السؤال
$\Delta TPQ \cong \Delta SPQ$ بنتج أن	حسب مسلمة SAS

(4



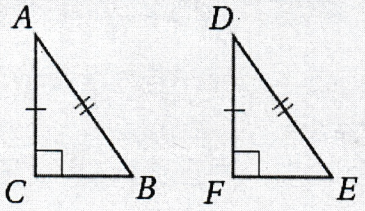
العبارات	المبررات
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	معطيات السؤال
$\overline{AM} \cong \overline{CM}$	أنصاف أقطار
$\overline{BM} \cong \overline{DM}$	أنصاف أقطار
$\Delta ABM \cong \Delta CDM$ بنتج أن	حسب مسلمة SSS

(5



العبارات	المبررات
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	معطيات السؤال
$\overline{AC}$	ضلع مشترك
$\angle BAC \cong \angle DCA$	تبادل داخلي
$\Delta BAC \cong \Delta CDA$ بنتج أن	حسب مسلمة SAS

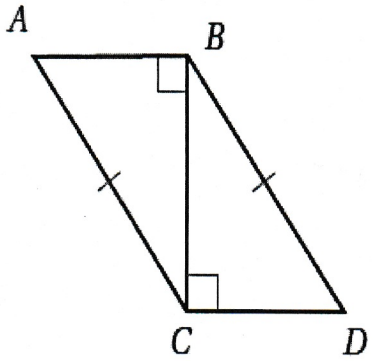
نظريةٌ — تطابقُ المثلثاتِ القائمةِ الزاويةِ بوترٍ وساقٍ (HL)



- **بالكلماتِ:** إذا طابقَ وَترٌ وساقٌ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ وَترًا وساقًا في مثلثٍ قائمٍ آخَرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ.
  وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ HL.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ، $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، فإنَّ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مثال

أثبت أن المثلثين ΔCDB وΔABC المبينين في الشكل المجاور متطابقان.



$\overline{CA} \cong \overline{BD}$ (مُعطى بالسؤال)

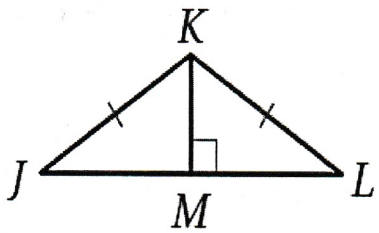
$\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (ضلع مشترك)

إذاً المثلثين ΔCDB ≅ ΔABC بحالة HL

تدريبات

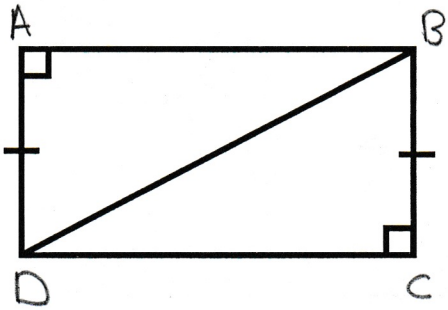
أبين أن كل زوج من المثلثات الآتية متطابق أم لا، مبرراً إجابتي:

1)



العبارات	المبررات
$\overline{KL} \cong \overline{KJ}$	معطى بالسؤال
$\overline{KM}$	ضلع مشترك
$\Delta KML \cong \Delta KMJ$ بتتبع HL	حسب مسلمة

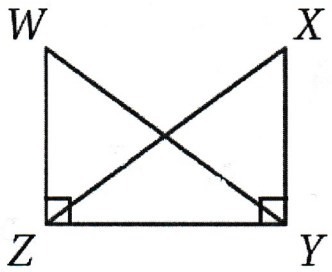
(2



العبارات	المبررات
$\overline{DB}$	ضلع مشترك
$\overline{BC} \cong \overline{AD}$	معطى في السؤال
$\triangle BDA \cong \triangle BDC$ بتبع HL حسب مسلمة	

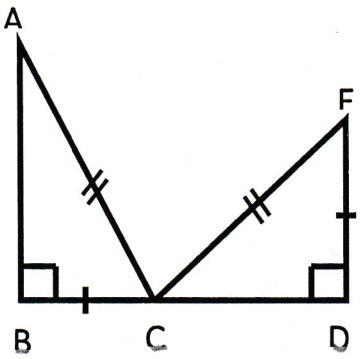
(3

إذا علمت أن $\overline{XY} \cong \overline{WZ}$



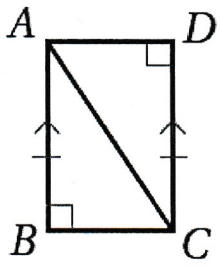
العبارات	المبررات
$\overline{XY} \cong \overline{WZ}$	معطى في السؤال
$\overline{ZY}$	ضلع مشترك
$\triangle XZY \cong \triangle WYZ$ بتبع HL حسب مسلمة	

(4



العبارات	المبررات
$\overline{FD} \cong \overline{AB}$	معطى في السؤال
$\overline{FC} \cong \overline{AC}$	معطى في السؤال
$\triangle FCD \cong \triangle ACB$ بتبع HL حسب مسلمة	

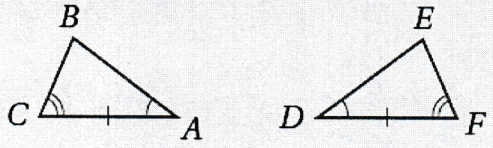
(5



العبارات	المبررات
$\overline{AC}$	ضلع مشترك
$\overline{CD} \cong \overline{BA}$	معطى في السؤال
$\triangle ACD \cong \triangle ACB$ بتبع HL حسب مسلمة	

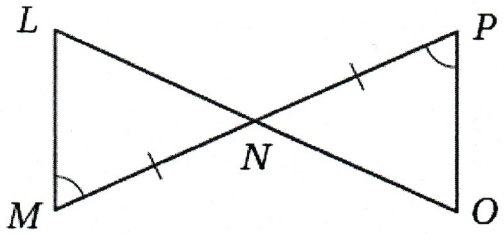
الدرس الثاني: تطابق المثلثات ASA	الوحدة الثالثة: المثلثات المتطابقة	النتاج: يطابق مثلثين باستعمال حالة ASA

مسلمةٌ التطابقُ بزاويتَينِ وضلعٍ محصورٍ بينَهُما (ASA)



- **بالكلماتِ:** إذا طابقَتْ زاويتانِ والضلعُ المحصورُ بينَهُما في مثلثٍ نظائرَهُما في مثلثٍ آخَرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ. وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ ASA.
- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\angle F \cong \angle C, \overline{DF} \cong \overline{AC}, \angle D \cong \angle A$ ، فإنَّ: $\Delta DEF \cong \Delta ABC$

مثال



استعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي؛ لإثبات أن $\Delta NML \cong \Delta NPO$ مع كتابة البرهان لإثبات ذلك.

$\overline{NM} \cong \overline{NP}$ (مُعطى بالسؤال)

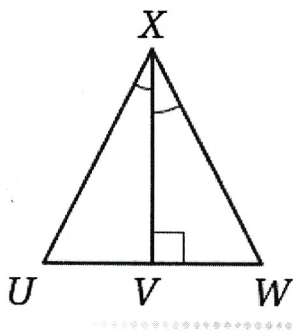
$\angle M \cong \angle P$ (مُعطى بالسؤال)

$\angle MNL \cong \angle PNO$ (زاويتان متقابلتان بالرأس)

إذاً $\Delta NML \cong \Delta NPO$ بحالة ASA

تدريبات

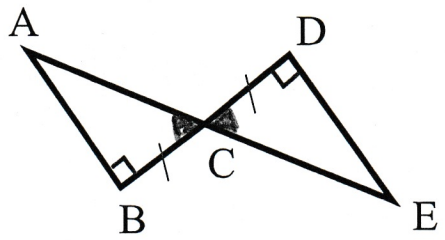
1) استعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي؛ لإثبات أن $\Delta WXV \cong \Delta UXV$ مع كتابة البرهان لإثبات ذلك.



المبررات	العبارات
ضلع مشترك	$\overline{XV}$
معطى بالسؤال	$\angle WXV \cong \angle UXV$
لأنه 90°	$\angle XVX \cong \angle XVU$
حسب مسلمة SAS	$\Delta UXV \cong \Delta WXV$

2) في الشكل المجاور، إذا علمت أن $BC \cong DC$ ،فأثبات أن

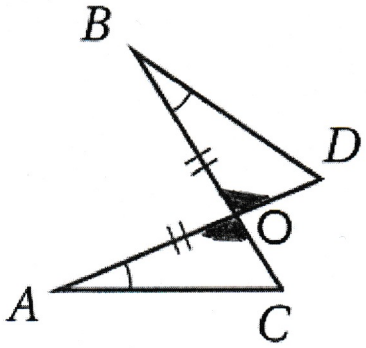
$\Delta EDC \cong \Delta ABC$ مع كتابة البرهان لإثبات ذلك.



العبارات	المبررات
$\angle D \cong \angle B$	قائمة $= 90^\circ$
$\angle ECD \cong \angle BCA$	التقابل بالرأس
$CD \cong CB$	معطيات السؤال
$\Delta ABC \cong \Delta EDC$	حسب مسلمة SAS ينتج

3) في الشكل المجاور، إذا علمت أن $AO \cong BO$، فأثبات أن

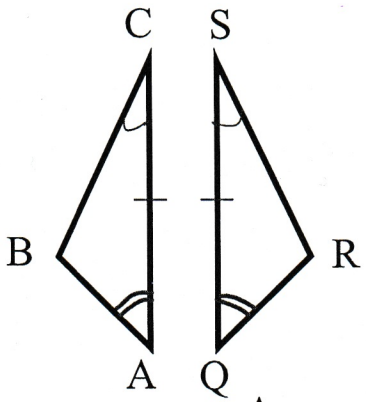
$\Delta BOD \cong \Delta AOC$ مع كتابة البرهان لإثبات ذلك.



العبارات	المبررات
$\angle B \cong \angle A$	معطيات السؤال
$\angle DOB \cong \angle COA$	التقابل بالرأس
$OB \cong OA$	معطيات السؤال
$\Delta AOC \cong \Delta BOD$	حسب مسلمة SAS ينتج

4) استعمل المعلومات المعطاة قي الشكل الآتي؛ لإثبات أن

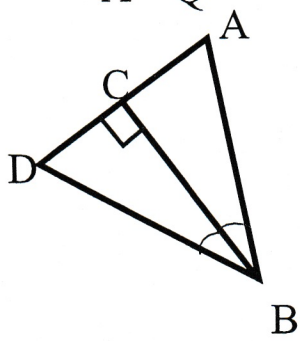
$\Delta QRS \cong \Delta ABC$ مع كتابة البرهان لإثبات ذلك.



العبارات	المبررات
$\angle S \cong \angle C$	معطيات السؤال
$\angle Q \cong \angle A$	معطيات السؤال
$QS \cong CA$	معطيات السؤال
$\Delta ABC \cong \Delta QRS$	حسب مسلمة SAS ينتج

5) استعمل المعلومات المعطاة قي الشكل الآتي؛ لإثبات أن

$\Delta DBC \cong \Delta ABC$ مع كتابة البرهان لإثبات ذلك.



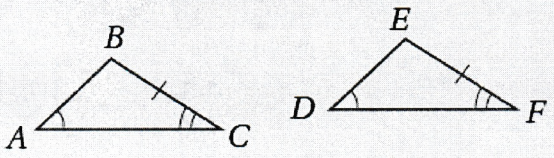
العبارات	المبررات
CB	ضلع مشترك
$\angle DBC \cong \angle DCA$	معطيات السؤال
$\angle BCA \cong \angle BCD$	قائمة $= 90^\circ$

$\Delta ABC \cong \Delta DBC$ ينتج SAS حسب مسلمة

الدرس الثاني: تطابق المثلثات AAS	الوحدة الثالثة: المثلثات المتطابقة	النتاج: يطابق مثلثين باستعمال حالة AAS

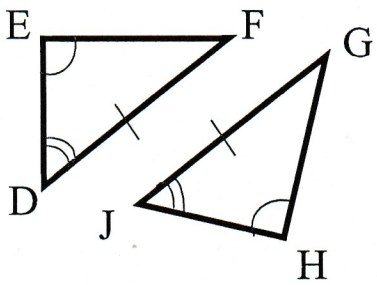
نظريةٌ — التطابقُ بزاويتَينِ وضلعٍ غيرِ محصورٍ بينَهُما (AAS)

- **بالكلماتِ:** إذا طابقَتْ زاويتانِ وضلعٌ غيرُ محصورٍ بينَهُما في مثلثٍ نظائرَهُما في مثلثٍ آخَرَ، فإنَّ المثلثَينِ متطابقانِ. وتُختصَرُ هذهِ الحالةُ بالرمزِ AAS.



- **بالرموزِ:** إذا كانَ: $\overline{BC} \cong \overline{EF}, \angle C \cong \angle F, \angle A \cong \angle D$ ، فإنَّ: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مثال



استعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي؛ لإثبات أن $\Delta JHG \cong \Delta DEF$ مع كتابة البرهان لإثبات ذلك.

$\overline{DF} \cong \overline{JG}$ (مُعطى بالسؤال)

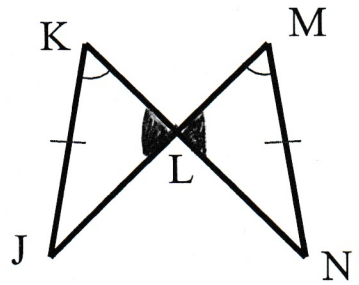
$\angle FDE \cong \angle GJH$ (مُعطى بالسؤال)

$\angle DEF \cong \angle JHG$ (مُعطى بالسؤال)

إذاً $\Delta DEF \cong \Delta JHG$ بحالة AAS

تدريبات

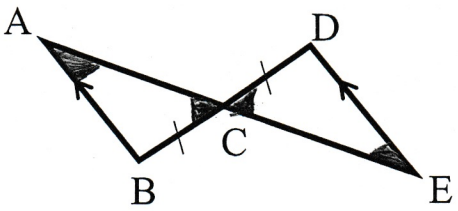
1) استعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي؛ لإثبات أن $\Delta NML \cong \Delta JKL$ مع كتابة البرهان لإثبات ذلك.



العبارات	المبررات
$\angle K \cong \angle M$	معطى في السؤال
$\overline{MN} \cong \overline{KJ}$	معطى في السؤال
$\angle MLN \cong \angle KLJ$	التقابل بالرأس
$\Delta JKL \cong \Delta NML$ بتبرير AAS	حسب حالة

2) في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\overline{DC} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$، فأثبت أن

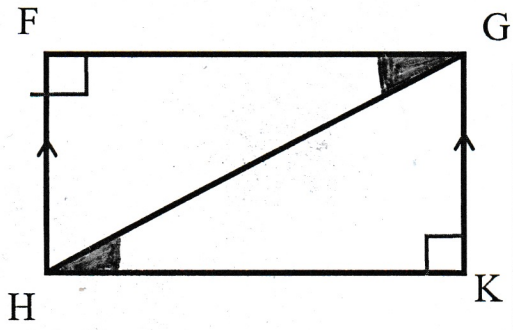
$\Delta EDC \cong \Delta ABC$ مع كتابة البرهان.



العبارات	المبررات
$\angle BAC \cong \angle DEC$	تبادل داخلي
$\angle ECD \cong \angle BCA$	التقابل بالرأس
$\overline{CD} \cong \overline{BC}$	معطيات السؤال
$\Delta ABC \cong \Delta EDC$ نتيجة AAS	حسب مسلمة

3) في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\overline{GK} \parallel \overline{HF}$، وأن $\angle K$ و $\angle F$ زاويتان قائمتان، فأثبت أن

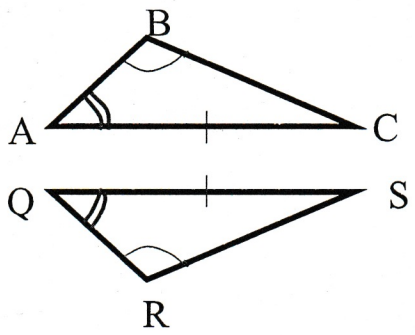
$\Delta HFG \cong \Delta GKH$ مع كتابة البرهان.



العبارات	المبررات
$\angle F \cong \angle K$	قائمة $= 90^\circ$
$\overline{GH}$	ضلع مشترك
$\angle KHG \cong \angle FGH$	تبادل داخلي
$\Delta HFG \cong \Delta GHK$ نتيجة AAS	حسب مسلمة

4) استعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي؛ لإثبات أن

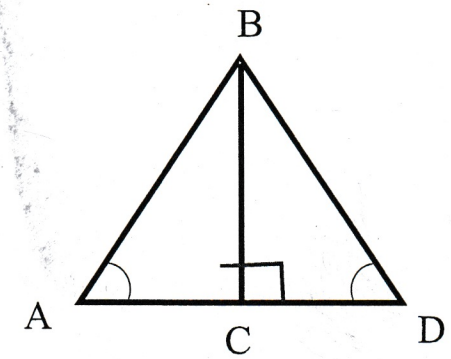
$\Delta ABC \cong \Delta QRS$ مع كتابة البرهان.



العبارات	المبررات
$\angle A \cong \angle Q$	معطيات السؤال
$\angle B \cong \angle R$	معطيات السؤال
$\overline{AC} \cong \overline{QS}$	معطيات السؤال
$\Delta ABC \cong \Delta QRS$ نتيجة AAS	حسب مسلمة

5) استعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي؛ لإثبات أن

$\Delta DBC \cong \Delta ABC$ مع كتابة البرهان.



العبارات	المبررات
$\overline{BC}$	ضلع مشترك
$\angle D \cong \angle A$	معطيات السؤال
$\angle ACB \cong \angle DCB$	قائمة $= 90^\circ$
$\Delta ABC \cong \Delta DBC$ نتيجة AAS	حسب مسلمة

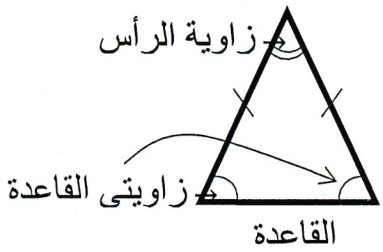
الدرس الثالث: المثلثات المتطابقة الضلعين	الوحدة الثالثة: المثلثات المتطابقة	النتاج: يستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين

تعلمت سابقًا أنواع المثلثات حسب الزوايا وهي : مثلث حاد الزوايا ، مثلث قائم الزاوية ، مثلث منفرج الزاوية.

أو ممكن تصنيف المثلثات حسب أضلاعها وهي : مثلث مختلف الأضلاع ، مثلث متطابق الضلعين ، مثلث متطابق الأضلاع.

سنركز بهذا الدرس على **مثلث متطابق الضلعين** : وهو مثلث الذي فيه ضلعان متطابقان على الأقل.

يُمثل الشكل المجاور مثلث متطابق الضلعين مع توضيح الأسماء الخاصة لكل جزء من أجزائه وتعريفها كما يأتي:



زاوية الرأس : هي الزاوية التي ضلعاها الضلعان المتطابقان.

القاعدة : هو الضلع الثالث غير المطابق.

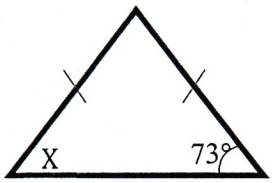
زاويتي القاعدة: الزاويتان المكونتان من القاعدة والضلعين المتطابقين.

خصائص المثلث المتطابق الضلعين:

1) زاويتا القاعدة متطابقتان.

مثال

جد قيمة الزاوية المجهولة x في الشكل المجاور، مبررًا اجابتك.



$x=73°$ لأن زوايا القاعدة في مثلث متطابق الضلعين متطابقة.

2)العمود النازل من رأس المثلث متطابق الضلعين على قاعدته، ينصفها وينصف زاوية الرأس.

مثال

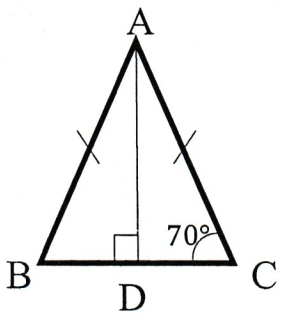
في الشكل المجاور المثلث ABC متطابق الضلعين، إذا كان AD عمودًا على BC ، جد قياس الزاوية BAD.

في المثلث ABC المتطابق الضلعين:

$\measuredangle B=70°$ لأن زوايا القاعدة في مثلث متطابق الضلعين متطابقة.

$\measuredangle A=40°$ لأن مجموع زوايا المثلث تساوي 180°.

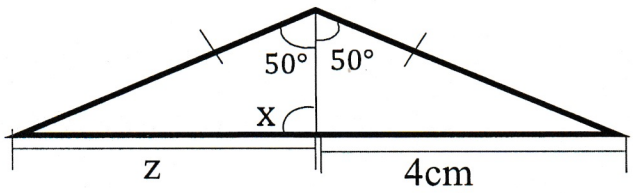
$\measuredangle BAD=20°$ لأن العمود النازل من رأس مثلث متطابق الضلعين ينصف زاوية الرأس.



3) منصّف زاوية رأس مثلث متطابق الضلعين يكون عموديًا على القاعدة وينصفها.

مثال

جد قيمة x , z في الشكل المجاور.



x=90° لأن منصف زاوية الرأس في مثلث متطابق الضلعين عمودي على القاعدة.

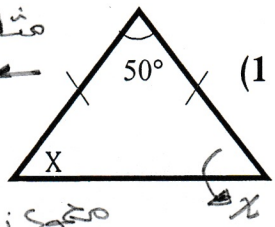
z=4cm لأن منصف زاوية الرأس في مثلث متطابق الضلعين منصّف للقاعدة .

تدريبات

جد قياس الزوايا المجهولة في كل شكل من الأشكال الآتية، مبررًا إجابتك.

(1

مثلث متطابق الضلعين
← زوايا القاعدة متساوية



مجموع زوايا المثلث = 180°

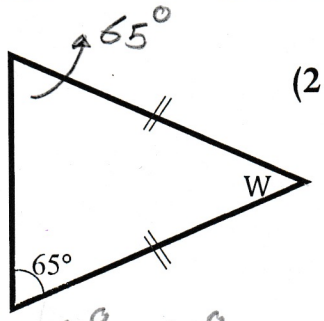
$x + x + 50^\circ = 180^\circ$

$2x + 50^\circ = 180^\circ$

$2x = 130^\circ \rightarrow x = 65^\circ$

(2

مثلث متطابق الضلعين
← زوايا القاعدة متساوية

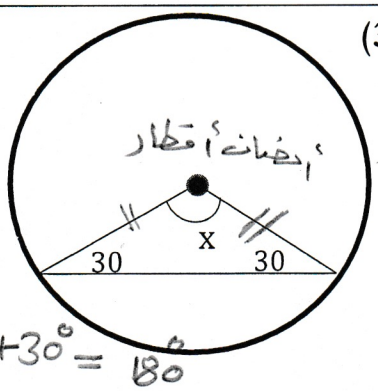


$\rightarrow W + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ$

$W + 130^\circ = 180^\circ$

$W = 50^\circ$

(3



مثلث متطابق الضلعين

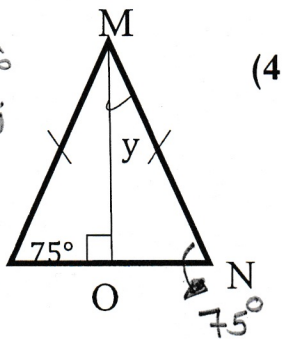
$x + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ$

$x + 60^\circ = 180^\circ$

$x = 120^\circ$

(4

مثلث متطابق الضلعين
زوايا القاعدة متساوية



مجموع زوايا المثلث = 180°

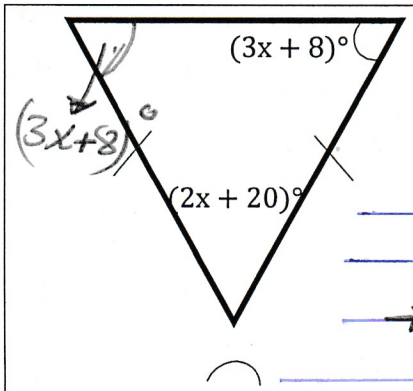
$75^\circ + 75^\circ + \angle M = 180^\circ$

$150^\circ + \angle M = 180^\circ$

$\angle M = 30^\circ$

$\rightarrow y = \frac{\angle M}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$

5) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



مثلث متطابق الضلعين ← زوايا القاعدة متساوية

← مجموع زوايا المثلث = 180°

→ $3x+8 + 3x+8 + 2x+20 = 180^\circ$

$8x + 36^\circ = 180^\circ$

$8x = 144^\circ$

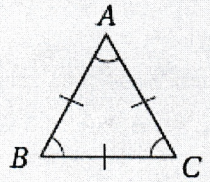
$x = 18^\circ$

ذكرنا بالدرس السابق أنواع المثلثات حسب أضلاعها وهي : مثلث مختلف الأضلاع ، مثلث متطابق الضلعين ، مثلث متطابق الأضلاع.

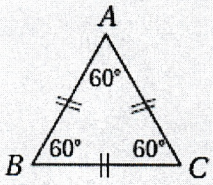
سنركز بهذا الدرس على **مثلث متطابق الأضلاع** : وهو مثلث الذي فيه أضلاعه الثلاثة متطابقة.

نتائج مهمة عن المثلث المتطابق الأضلاع:

نتيجتان — المثلثُ المتطابقُ الأضلاعِ



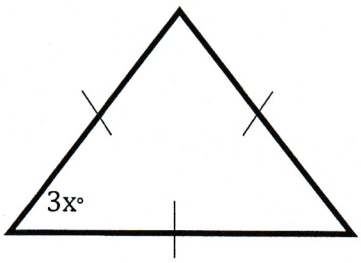
- **بالكلماتِ:** يكونُ المثلثُ متطابقَ الأضلاعِ إذا وفقط إذا كانَ متطابقَ الزوايا.
- **بالرموزِ:** $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ إذا وفقطْ إذا كانَ $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$



- **بالكلماتِ:** قياسُ كلِّ زاويةٍ في المثلثِ المتطابقِ الأضلاعِ $60°$
- **بالرموزِ:** إذا كانَ $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ فإنَّ $\angle A \cong \angle B \cong \angle C = 60°$

مثال

جد قيمة المتغير x في الشكل المجاور، مبررًا اجابتك.



بما أن المثلث متطابق الأضلاع إذًا جميع الزوايا قياسها 60° .

$3x = 60$ ← بقسمة الطرفين على العدد 3 تكون قيمة $x = 20$.

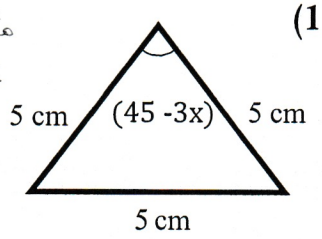
تدريبات

جد قيمة المتغير في كل شكل من الأشكال الآتية، مبررًا إجابتك.

(1

مثلث متطابق الأضلاع

قياس زاويته 60°



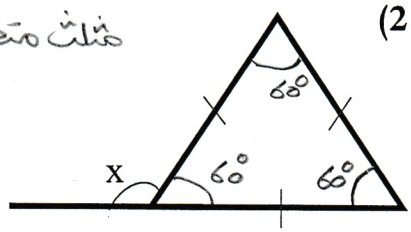
$45-3x=60^\circ$

$-3x=15^\circ$

$x=-5^\circ$

(2

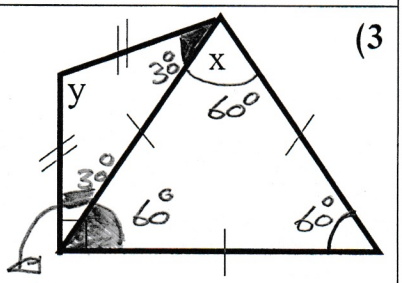
مثلث متطابق الأضلاع



$x+60^\circ=180^\circ$ زاوية مستقيمة

$x=120^\circ$

(3



$x=60^\circ$

$90^\circ-60^\circ$

$=30^\circ$

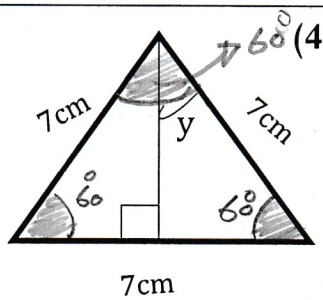
$y+30^\circ+30^\circ=180^\circ$

$y+60^\circ=180^\circ$

$y=120^\circ$

(4

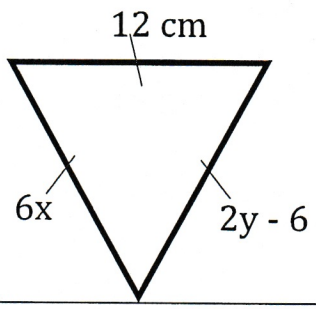
مثلث متطابق الأضلاع



$y=\frac{60^\circ}{2}$

$y=30^\circ$

5) أوجد قيمة x و y في الشكل المجاور.



مثلث متطابق الأضلاع

$6x=12 \longrightarrow x=2cm$

$2y-6=12 \longrightarrow 2y=18 \longrightarrow y=9cm$

انتهت بحمدالله