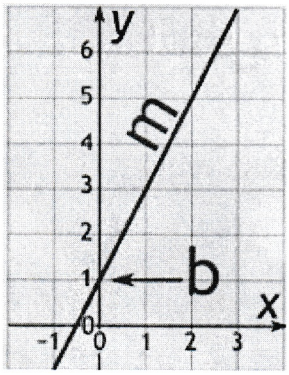
الوحدة الثالثة

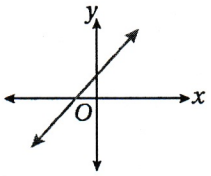
المعادلات الخطية بمتغيرين



الدرس الأول: المعادلة الخطية بالصورة القياسية.

الوحدة الثالثة: المعادلات الخطية بمتغيرين

النتاج: يتعرف الصيغة القياسية للمعادلة الخطية ويمثلها بيانياً.



تعلّمْتُ سابقًا أنَّ المعادلةَ الخطّيّةَ هيَ المعادلةُ التي تُمثِّل بيانيًّا بخطٍّ مستقيمٍ كما في الشكلِ المجاورِ. وتُكتَبُ المعادلةُ الخطّيّةُ عادةً على الصورةِ $Ax + By = C$، والتي تُسمّى الصورةَ القياسيةَ (standard form) للمعادلةِ الخطّيّةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ الصورةُ القياسيّةُ للمعادلةِ الخطّيّةِ

- **بالكلماتِ** الصورةُ القياسيّةُ للمعادلةِ الخطّيّةِ هي:

$$Ax + By = C$$

حيثُ A, B, C أعدادٌ حقيقيةٌ، ولا تكونُ قيمتا A و B معًا صفرًا.

يمكن استخدام **الصورة القياسية** لتحديد ما إذا كانت المعادلة خطية أم لا .

مثال: هل المعادلة $y = 5x + 3$ خطية أم لا؟

الحل

نعيد كتابة المعادلة بحيث تكون المتغيرات على الطرف نفسه:

$$Y - 5x = 3$$

هذه المعادلة تكافىء الصورة:

$$-5x + y = 3$$

بما أنه يمكن كتابة المعادلة على الصورة: $Ax + By = C$
حيث: $C = 3$, $B = 1$, $A = -5$ ، إذن فهي معادلة خطية.
في المعادلة الخطية يكون أس المتغيرات فيها (1).
ادرس المعادلات في الجدول الآتي ثم أكمله.

المعادلة	هل هي خطية أم لا؟	السبب
$\frac{2}{x} + 4y = 3$	ليست خطية	وجود x في المقام
$x^3 + 2Y = -1$	ليست خطية	قوة (الاس) 3 =
$\frac{1}{4}x = 7$	خطية	قوة (الاس) 1 =

تدريبات

أحدد أي المعادلات الآتية خطية (مبينا السبب)،وإذا كانت خطية اكتبها على الصورة القياسية :

1) $2x=1-3y$ خطية / قوة (الاسس) للمتغيرات = 1 الصورة القياسية $2x+3y=1$ المعاملات $A=2, B=3, C=1$	2) $x^2-3y=8$ ليست خطية / قوة (الاسس) = 2
3) $\frac{1}{5}X=2$ خطية قوة الاسس للمتغير = 1 الصورة القياسية $\frac{1}{5}x=2$ المعاملات $A=\frac{1}{5}, B=0, C=2$	4) $3x=5x-4y$ خطية / قوة (الاسس) للمتغيرات = 1 الصورة القياسية $2x-4y=0$ المعاملات $A=2, B=-4, C=0$
5) $2x-4y=8$ خطية / قوة (الاسس) للمتغيرات = 1 الصورة القياسية $2x-4y=8$ المعاملات $A=2, B=-4, C=8$	6) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=2$ خطية / قوة (الاسس) للمتغيرات = 1 الصورة القياسية $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=2$ المعاملات $A=\frac{1}{2}, B=\frac{-1}{3}, C=2$

التمثيلُ البيانيُّ للمعادلةِ الخطيّةِ هو مستقيمٌ يمرُّ في الأزواجِ المُرتّبةِ جميعِها التي تمثّلُ حلولاً للمعادلةِ، وأيُّ زوجٍ مرتّبٍ يقعُ على هذا المستقيمِ يمثّلُ حلًّا للمعادلةِ.

أتذكّر

حلُّ المعادلةِ الخطيّةِ هو الزوجُ المرتّبُ الذي ينتجُ عنْ تعويضِه في المعادلةِ عبارةٌ صحيحةٌ.

يمكنُ تمثيلُ المعادلةِ بإنشاءِ جدولِ قيمٍ، وذلكَ باختيارِ قيمٍ للمتغيرِ x وتعويضِها في المعادلةِ لإيجادِ قيمِ y المقابلةِ لها، ثمَّ تمثيلِ الأزواجِ المرتّبةِ الناتجةِ في المستوى الإحداثيِّ.

أمثّلُ المعادلةَ $2x - y = 1$ بيانيًّا.

الخُطوةُ 1 أحلُّ المعادلةَ بالنسبةِ إلى y؛ لتسهيلِ عمليةِ إيجادِ قيمِ y المقابلةِ لقيمِ x.

المعادلةُ الأصليةُ	$2x - y = 1$
أطرحُ $2x$ من كِلا الطرفينِ	$2x - y - 2x = 1 - 2x$
أقسمُ طَرَفَي المعادلةِ على -1	$\frac{-y}{-1} = \frac{1-2x}{-1}$
أُبسّطُ	$y = 2x - 1$

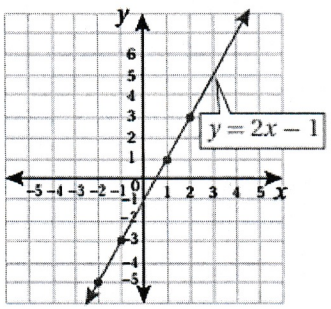
الخُطوةُ 2 أُنشئُ جدولَ قيمٍ.

ملاحظة:
يمكن رسم المستقيم بتعيين نقطتين فقط تقعان عليه.

أختارُ قيمًا للمتغيرِ x، ثمَّ أعوّضُها في المعادلةِ لأجدَ قيمَ y المقابلةَ لها.

x	$2x-1$	y	(x, y)
-2	$2(-2)-1$	-5	$(-2, -5)$
-1	$2(-1)-1$	-3	$(-1, -3)$
0	$2(0)-1$	-1	$(0, -1)$
1	$2(1)-1$	1	$(1, 1)$
2	$2(2)-1$	3	$(2, 3)$

الخُطوةُ 3 أمثّلُ الأزواجَ المُرتّبةَ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ مستقيمًا يمرُّ بها جميعًا.



أتعلّم

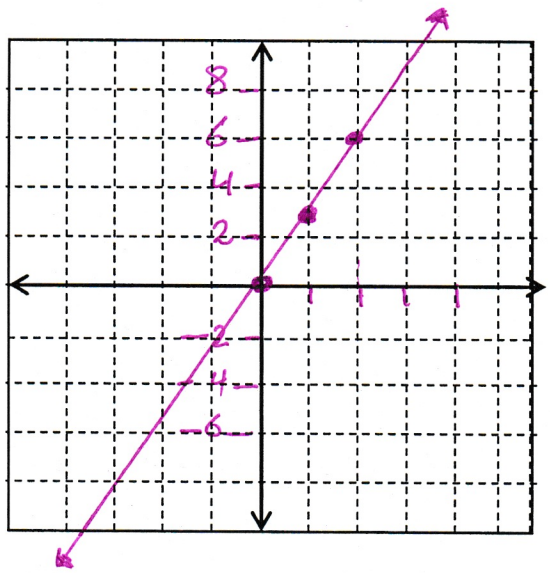
عندَ تمثيلِ المعادلةِ بيانيًّا، أستعملُ الأسهمَ لتوضيحِ أنَّ المستقيمَ غيرُ مُنتهٍ.

تدريبات

أمثل المعادلات الآتية بيانياً :

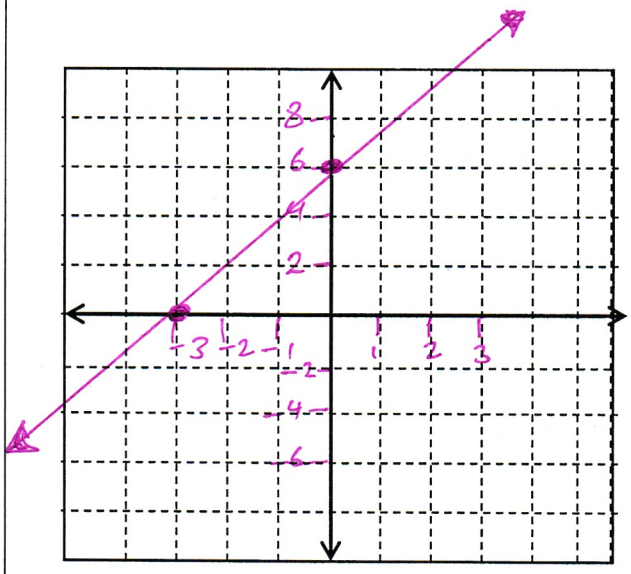
1) Y=3x

x	0	1	2
y	0	3	6



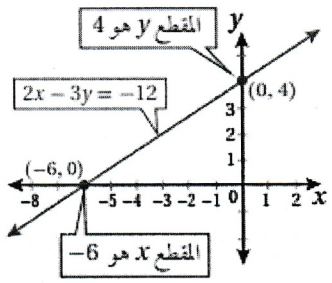
2) 2y−4x=12

x	0	−3	
y	6	0	



بما أنَّهُ يمكنُ تمثيلُ المستقيمِ بنقطتينِ، فإنَّ أسهلَ طريقةٍ لتمثيلِ المعادلةِ الخطيّةِ هي إيجادُ نقطتَيْ تقاطعِ المستقيمِ معَ المحورينِ الإحداثيّينِ (إنْ أمكنَ).

يُسمّى الإحداثيُّ x للنقطةِ التي يقطعُ عندَها المستقيمُ المحورَ x **المقطعَ x** (x–intercept)، ويُسمّى الإحداثيُّ y للنقطةِ التي يقطعُ عندَها المستقيمُ المحورَ y **المقطعَ y** (y–intercept)



مثال:

أمثل المعادلة الآتية بيانياً باستعمال المقطع x,y :

$3x - 2y = 6$

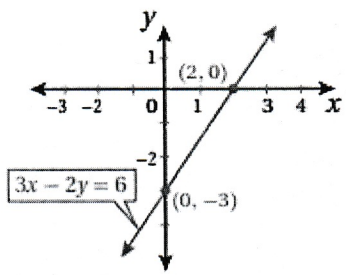
الخطوة 1 أجدُ المقطعَ x والمقطعَ y.

المعادلةُ الأصليةُ	$3x - 2y = 6$
أعوّضُ $y = 0$	$3x - 2\,(0) = 6$
أقسمُ كِلا الطرفينِ على 3	$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$
أبسّطُ	$x = 2$

المعادلةُ الأصليةُ	$3x - 2y = 6$
أعوّضُ $x = 0$	$3(0) - 2y = 6$
أقسمُ كِلا الطرفينِ على -2	$\frac{-2y}{-2} = \frac{6}{-2}$
أبسّطُ	$y = -3$

إذنْ، فالمقطعُ x هو 2، والمقطعُ y هو -3

الخطوة 2 أُمثّلُ نقطتَيْ تقاطعِ المستقيمِ معَ المحورينِ الإحداثيّينِ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ مستقيمًا يصلُ بينَ النقطتينِ.



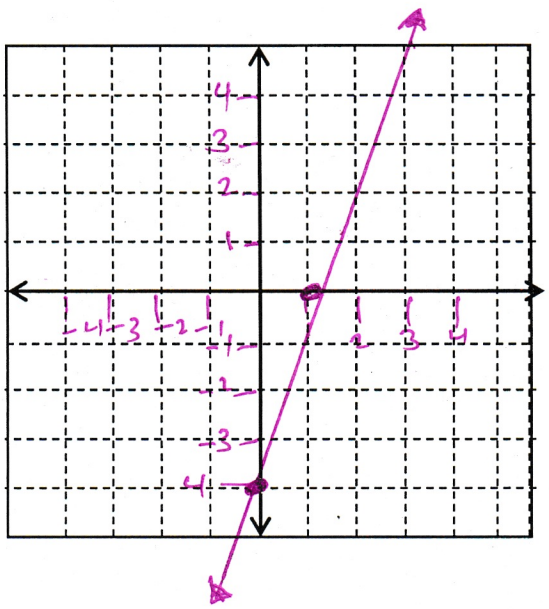
بما أنَّ المقطعَ x هُوَ 2، فإنَّ المستقيمَ يقطعُ المحورَ x في النقطةِ (2, 0)، وبما أنَّ المقطعَ y هو -3، فإنَّ المستقيمَ يقطعُ المحورَ y في النقطةِ (0, −3)، أُمثّلُ النقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ مستقيمًا يصلُ بينَهُما.

تدريبات

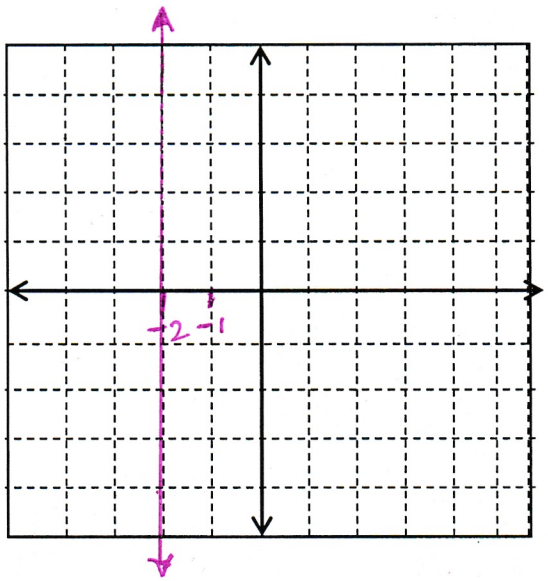
أمثل المعادلات الآتية بيانياً باستعمال المقطع x والمقطع y:

1) $4x-y=4$

x	0	1
y	-4	0

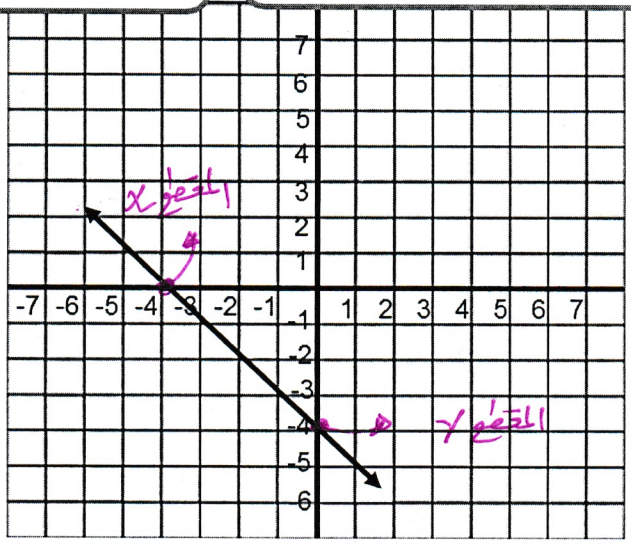


2) $x=-2$



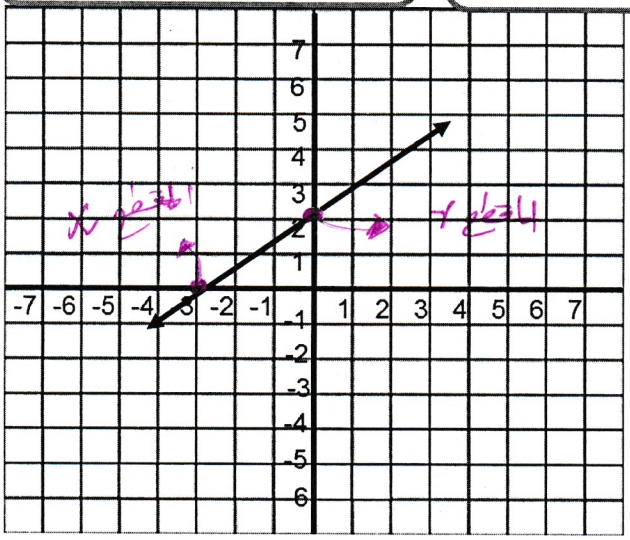
أجد المقطع x والمقطع y لكل معادلة ممثله بيانيا مما يأتي

الدرس الثاني: ميل المستقيم	الوحدة الثالثة: المعادلات الخطية بمتغيرين	النتاج: يجد ميل المستقيم



المقطع x ← $x=-4$ $(-4,0)$

المقطع y ← $y=-4$ $(0,-4)$



المقطع x ← $x=-3$ $(-3,0)$

المقطع y ← $y=2$ $(0,2)$

سؤال: تتحرك مركبة حسب العلاقة $y = 8 - 2x$ ، حيث y كمية الوقود باللترات المتبقيه في خزان السياره بعد قيادتها x ساعة.

1) أجد المقطع x والمقطع y

المقطع x ← نضع $y=0$

$0 = 8 - 2x$

$2x = 8$ ←

$x = 4$

المقطع y ← نضع $x=0$

$y = 8$

2) صف مدلول كل من المقطعين في هذه الحاله

عندما تكون $x=0$ أي صفر ساعة تكون كمية الوقود 8 لتر

عندما تكون $y=0$ أي كمية الوقود صفر لتر تكون المسافة المقطوعة في 4 ساعات

ميل المستقيم هو وصف لمقدار انحدار المستقيم. **فالميل هو نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.**

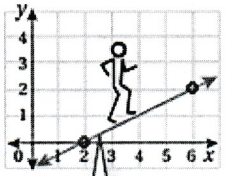
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{المَيلُ} = \frac{\text{التغيّرُ الرأسيُّ}}{\text{التغيّرِ الأفقيِّ}}$$

يمكن أن يكون ميل المستقيم سالباً أو موجبا او صفرا او غير معرف كما يظهر في التمثيلات البيانية أدناه. للمقارنة بين ميل المستقيمات المختلفة أتخيل نفسي أسير على كل منحنى من اليسار إلى اليمين:

المَيلُ موجبٌ



يرتفعُ المستقيمُ إلى الأعلى عندَ التحرُّكِ منَ اليسارِ إلى اليمينِ

مثال

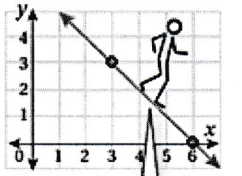
$(2,0)$, $(6,2)$

$$m = \frac{2-0}{6-2}$$

$$m = \frac{2}{4}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

الميلُ سالبٌ



ينحدرُ المستقيمُ إلى الأسفلِ عندَ التحرُّكِ منَ اليسارِ إلى اليمينِ

مثال

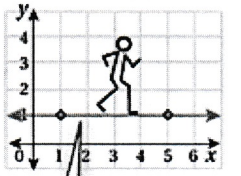
$(6,0)$, $(3,3)$

$$m = \frac{3-0}{3-6}$$

$$m = \frac{3}{-3}$$

$$m = -1$$

الميلُ صفرٌ



مستقيمٌ أفقيٌّ

مثال

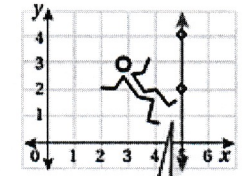
$(1,1)$, $(5,1)$

$$m = \frac{1-1}{5-1}$$

$$m = \frac{0}{4}$$

$$m = 0$$

المَيلُ غيرُ مُعرَّفٍ



مستقيمٌ عموديٌّ

مثال

$(5,2)$, $(5,4)$

$$m = \frac{4-2}{5-5}$$

$$m = \frac{2}{0}$$

ميل المستقيم غير معرف

تدريبات

جد ميل المستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

2) (−1,2), (3,5)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{5-2}{3--1} = \frac{3}{4}$

2) (−1, −2), (−4,1)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{1--2}{-4-1} = \frac{3}{-3} = -1$

3) (1,2), (−3,2)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{2-2}{-3-1} = \frac{0}{-4} = 0$

4)(1,5), (1, −4)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{-4-5}{1-1} = \frac{-9}{0}$ غير معرّف

5)(3,3), (5,7)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{7-3}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$

6)(6,1), (4,3)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{3-1}{4-6} = \frac{2}{-2} = -1$

7)(−2, −6), (−2,6)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

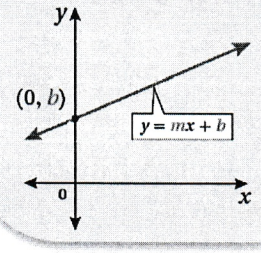
$m = \frac{6--6}{-2--2} = \frac{12}{0}$ غير معرّف

8)(5, −7), (0, −7)

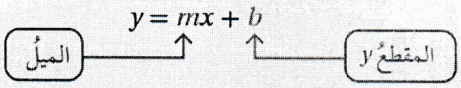
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{-7--7}{0-5} = \frac{0}{-5} = 0$

مفهومٌ أساسيٌّ صيغةُ الميلِ والمقطعِ



- **بالكلماتِ:** صيغةُ الميلِ والمقطعِ للمعادلةِ الخطّيّةِ هيَ: $y = mx + b$، حيثُ m مَيلُ المستقيمِ، وb المقطعُ y لهُ.
- **بالرموزِ:**



مثال (1)

اكتب معادلة المستقيم الذي ميله 4 والمقطع y له 7− بصيغة الميل والمقطع.

أعوض الميل والمقطعy في صيغة الميل والمقطع

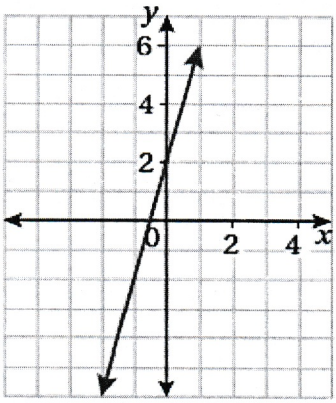
$y = m\,x + b$

$y = 4\,x + (-7)$

$y = 4x - 7$

مثال (2)

اكتب معادلة المستقيم الممثلة بيانياً في الشكل المجاور بصيغة الميل والمقطع.



المقطع y يساوي 2

نختار النقطتين (0,2)، (−1,−2) نجد الميل حسب ما تعلمنا في الدرس السابق

الميل يساوي 4

إذن المعادلة هي $y=4x+2$

تدريبات

جد معادلة المستقيم في كل مما يأتي:

1)إذا كان الميل يساوي 1 والمقطع y يساوي 1-

$m=1 \quad b=-1$

$y=mx+b$

$y=1x-1$

2) إذا كان الميل يساوي 5 والمقطع y يساوي 2

$m=5 \quad b=2$

$y=mx+b$

$y=5x+2$

3) إذا كان الميل يساوي 4 وكان المستقيم يمر بنقطة الأصل.

$m=4 \quad (0,0)$

$y=mx+b$

$0=4(0)+b \Rightarrow b=0$

$y=4x$

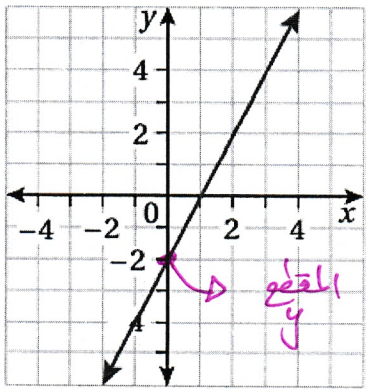
4) إذا كان الميل 3- والمقطع y يساوي 5

$m=-3 \quad b=5$

$y=mx+b$

$y=-3x+5$

5)



$b=-2 \quad (0,-2), (1,0)$

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

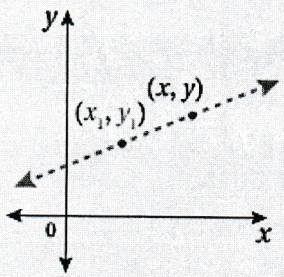
$m=\frac{0--2}{1-0}=\frac{2}{1}=2$

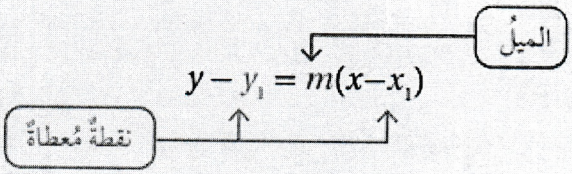
$y=2x-2$

الدرس الرابع: معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة	الوحدة الثالثة: المعادلات الخطية بمتغيرين	النتاج: يكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

مفهومٌ أساسيٌّ صيغةُ المَيلِ ونقطةٍ

- **بالكلماتِ:** صيغةُ الميلِ ونقطةٍ للمعادلةِ الخطّيّةِ هيَ: $y-y_1=m(x-x_1)$، حيثُ m ميلُ المستقيمِ، و(x_1, y_1) نقطةٌ مُعطاةٌ.
- **بالرموزِ:**





مثال

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (−3,6) وميله 4 بصيغة الميل ونقطة.

أعوض الميل والنقطة المعطاة في صيغة الميل ونقطة.

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-6 = 4(x-(-3))$

$y-6 = 4(x+3)$

$y-6 = 4x+12$

$y = 4x+12+6$

$y = 4x+18$

تدريبات

اكتب معادلة كل مستقيم مما يأتي:

1) مستقيم مار بالنقطة (8,−4) وميله 2

$y = mx + b$

$-4 = 2(8) + b$

$-4 = 16 + b$

$b = -20$

$y = 2x - 20$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - -4 = 2(x - 8)$

$y + 4 = 2x - 16$

$y = 2x - 20$

2) مستقيم مار بالنقطتين (6,2)،(1,−8)

$m = \frac{2 - -8}{1 - 6} = \frac{10}{-5} = -2$

$y = mx + b$

$2 = -2(6) + b$

$2 = -12 + b$

$b = 14$

$y = -2x + 14$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -2(x - 6)$

$y - 2 = -2x + 12$

$y = -2x + 14$

3) مستقيم مار بالنقطة (4,−3) وميله 3

$y = mx + b$

$-3 = 3(4) + b$

$-3 = 12 + b$

$b = -15$

$y = 3x - 15$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - -3 = 3(x - \ )$

$y + 3 = 3x - 12$

$y = 3x - 15$

4) مستقيم مار بالنقطة (−2,−7) وميله 5−

$y = mx + b$

$-7 = -5(-2) + b$

$-7 = 10 + b$

$b = -17$

$y = -5x - 17$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - -7 = -5(x - -2)$

$y + 7 = -5(x + 2)$

$y + 7 = -5x - 10$

$y = -5x - 17$

5) مستقيم مار بالنقطتين (3,7), (−3,−5)

$m = \frac{-5 - 7}{-3 - 3} = \frac{-12}{-6} = 2$

$y = mx + b$

$7 = 2(3) + b$

$7 = 6 + b$

$b = 1$

$y = 2x + 1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 7 = 2(x - 3)$

$y - 7 = 2x - 6$

$y = 2x + 1$

6) مستقيم مار بالنقطتين (−5,8)،(9,−6)

$m = \frac{8 - -6}{-5 - 9} = \frac{14}{-14} \rightarrow m = -1$

$y = mx + b$

$-6 = -1(9) + b$

$-6 = -9 + b$

$b = 3$

$y = -1x + 3$

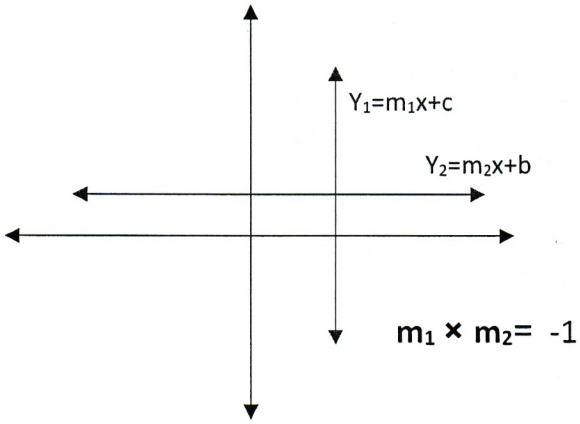
$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - -6 = -1(x - 9)$

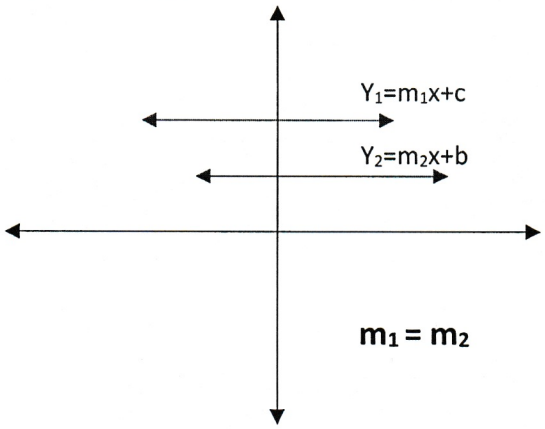
$y + 6 = -1x + 9$

$y = -1x + 3$

الدرس الخامس: المستقيمات المتوازية والمتعامدة	الوحدة الثالثة: المعادلات الخطية بمتغيرين	النتاج: يكتب معادلة المستقيم المار بنقطة ويوازي مستقيماً معلوماً. يكتب معادلة المستقيم المار بنقطة ويوازي مستقيماً معلوماً.



يسمى المستقيمان اللذان يتقاطعان مكونين زاوية قائمة بالمستقيمين المتعامدين ويكون حاصل ضرب ميليهما يساوي -1



يسمى المستقيمان الواقعان في المستوى نفسه ولا يقطع أحدهما الآخر بالمستقيمين المتوازيين ويكون لهما الميل نفسه.

مثال (1)

حدد فيما إذا كان المستقيمان $y=2x+10, y=2x-7$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

ميل المستقيم $y=2x+10$ يساوي 2

ميل المستقيم $y=2x-7$ يساوي 2

بما أن الميلين متساويين إذن المستقيمين متوازيين.

مثال (2)

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بالنقطة $(4,0)$ والعمودي على المستقيم $y=-2x+1$.

ميل المستقيم العمودي على المستقيم المعطى يساوي معكوس مقلوب العدد -2 أي $\frac{1}{2}$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-0=\frac{1}{2}(x-4)$

$y=\frac{1}{2}x-2$

تدريبات

1) أحدّد العلاقة بين المستقيمين
(متوازيين، متعامدين، غير ذلك)

$y = 2x+3$

$y = -2x+7$

$m_1 = 2$, $m_2 = -2$

غير ذلك

2) أحدّد العلاقة بين المستقيمين
(متوازيين، متعامدين، غير ذلك)

$y = \frac{1}{4}x-5$

$y = -4x-8$

$m_1 = \frac{1}{4}$, $m_2 = -4$

$\frac{1}{4} * -4 = -1$

متعامدين

3) أجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (1,2)
ويوازي المستقيم $y=3x+2$

يوازي ← طلعا نفس الميل

$m=3$, $(1,2)$

$y = mx+b$

$2 = 3(1)+b$

$2 = 3+b \rightarrow b=-1$

$y = 3x-1$

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-2 = 3(x-1)$

$y-2 = 3x-3$

$y = 3x-1$

4) أجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (3, −2)
ويعامد المستقيم $y=\frac{1}{4}x+7$

يعامد ← حاصل ضربهما = −1

$m * \frac{1}{4} = -1 \rightarrow m = -4$

$y = mx+b$

$-2 = -4(3)+b$

$-2 = -12+b$

$b = 10$

$y = -4x+10$

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y+2 = -4(x-3)$

$y+2 = -4x+12$

$y = -4x+10$

5) أجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (5،−1)
ويوازي المستقيم $y = 4x - 10$

يوازي ← طلعا نفس الميل

$m=4$, $(5,-1)$

$y = mx+b$

$-1 = 4(5)+b$

$-1 = 20+b$

$b = -21$

$y = 4x-21$

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-(-1) = 4(x-5)$

$y+1 = 4x-20$

$y = 4x-21$

6) أجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (2,−7)
ويعامد المستقيم $y=x-2$

يعامد ← حاصل ضربهما = −1

$m * 1 = -1 \rightarrow m = -1$

$y = mx+b$

$-7 = -1(2)+b$

$-7 = -2+b$

$b = -5$

$y = -1x-5$

$y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-(-7) = -1(x-2)$

$y+7 = -1x+2$

$y = -1x-5$